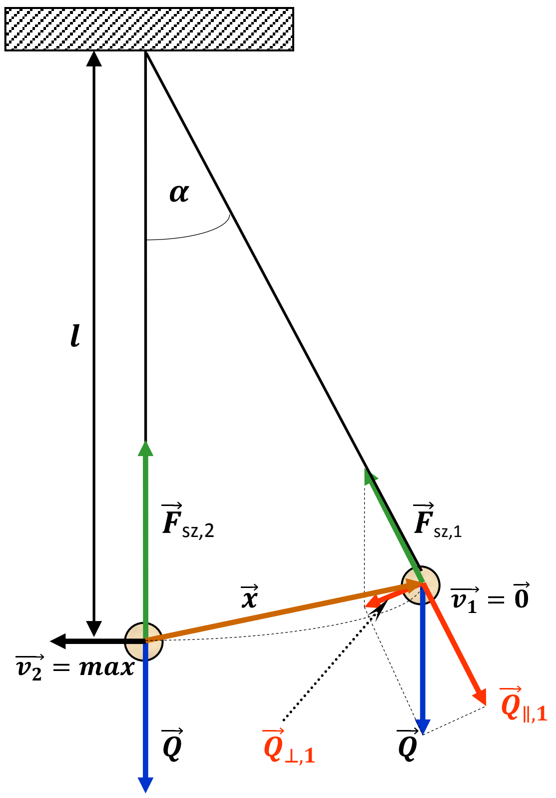
Wahadło matematyczne - teoria



Wahadło matematyczne – masa punktowa zawieszona na nierozciągliwej i nieważkiej nici. Za dobre jego przybliżenie można uważać niewielką kulkę zawieszoną na długiej nici (o długości wielokrotnie większej od promienia kulki), jeżeli masa tej nici jest pomijalnie mała w porównaniu do masy kulki.

Przyjęte na rysunku oznaczenia:

$\boldsymbol{l}$ – długość wahadła (odległość od środka ciężkości kulki do osi obrotu

$\boldsymbol{m}$ – masa wahadła (masa kulki)

$\vec{\boldsymbol{Q}}$ **–** ciężar kulki ($\boldsymbol{Q} = const = \boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{g}$)

$\vec{\boldsymbol{Q}}_{\perp}$ – składowa ciężaru kulki na kierunku prostopadłym do nici

$\vec{\boldsymbol{Q}}_{\parallel}$ **–** składowa ciężaru kulki na kierunku wyznaczonym przez nić

$\vec{\boldsymbol{F}}_{sz}$ – siła naciągu nici

$\vec{\boldsymbol{F}}_{w}$ – wektor siły wypadkowej

$\vec{\boldsymbol{x}}$ – wektor wychylenia z położenia równowagi

1 – kulka wychylona maksymalnie z położenia równowagi

2 - kulka podczas przechodzenia przez położenie równowagi

$\boldsymbol{A}$ – amplituda drgań (maksymalne wychylenie z położenia Równowagi

$$|\vec{x_1}| = max = A \qquad |\vec{x_2}| = 0$$

Po wychyleniu wahadła z położenia równowagi o kąt $\boldsymbol{\alpha}$ i swobodnym puszczeniu, zacznie ono wykonywać ruch okresowy o pewnej amplitudzie, którą przy niewielkich oporach ośrodka (powietrza) i w krótkim przedziale czasu można uważać za stałą. Siłą wprawiającą wahadło w ruch (po jego wychyleniu z położenia równowagi) jest wypadkowa dwóch sił: ciężaru kulki $\vec{\boldsymbol{Q}}$ i siły reakcji nici $\vec{\boldsymbol{F}}_{sz}$, tzn. można ją wyrazić następująco:

$$\vec{F}_w = \vec{Q} + \vec{F}_{sz}$$

Ciężar kulki $\vec{\boldsymbol{Q}}$ można rozłożyć na dwie składowe, $\vec{\boldsymbol{Q}}_{\parallel}$ i $\vec{\boldsymbol{Q}}_{\perp}$, przy czym musi zachodzić związek:

$$\vec{Q}_{\perp} + \vec{Q}_{\parallel} = \vec{Q} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_w = \vec{Q}_{\perp} + \vec{Q}_{\parallel} + \vec{F}_{sz}$$

Ponieważ na kierunku wyznaczonym przez nić kulka się nie porusza, to siły na tym kierunku muszą się równoważyć, tzn.:

$$\vec{Q}_{\parallel} + \vec{F}_{sz} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_w = \vec{Q}_{\perp}$$

Przy kącie wychylenia z położenia równowagi $\boldsymbol{\alpha}$, wartość składowej ciężaru prostopadłej do nici dana jest zależnością wynikającą z rysunku (dla trójkąta prostokątnego wyznaczonego przez wektor ciężaru i jego składowe):

$$Q_{\perp} = Q \cdot sin\alpha = m \cdot g \cdot sin\alpha \quad \Rightarrow \quad F_w = m \cdot g \cdot sin\alpha$$

W przypadku odpowiednio długiego wahadła i niewielkiego kąta wychylenia z położenia równowagi ($\alpha < 10°$), trójkąt wyznaczony przez oba położenia nici (pokazane na rysunku) i wektor wychylenia z położenia równowagi $\vec{\boldsymbol{x}}$ można uważać (w przybliżeniu) za prostokątny. Dla wyżej wzmiankowanego trójkąta można wtedy zapisać, że:

$$sin\alpha \approx \frac{x}{l} \quad \Rightarrow \quad F_w = \frac{m \cdot g}{l} \cdot x \quad \Rightarrow \quad F_w \sim x$$

Wynika stąd, że wartość siły wypadkowej jest wprost proporcjonalna do wychylenia wahadła z położenia równowagi. Ponadto wektory $\vec{F}_w$ i $\vec{x}$ mają (w przybliżeniu) te same kierunki, ale przeciwne zwroty. Zatem:

$$\vec{F}_w \sim -\vec{x}$$

Oznacza to, że wahadło wykonuje ruch harmoniczny. W takim ruchu zachodzi zależność:

$$k = m \cdot \omega^2 \quad gdzie \quad \omega = \frac{2 \cdot \pi}{T}$$

Ponieważ

$$F_w = \frac{m \cdot g}{l} \cdot x \quad \Rightarrow \quad k = \frac{m \cdot g}{l} \quad \Rightarrow \quad m \cdot \omega^2 = \frac{m \cdot g}{l} \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = \frac{g}{l} \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{l}{g}} \quad \Rightarrow \quad \frac{2 \cdot \pi}{T} = \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Stąd (po prostym przekształceniu) okres drgań wahadła matematycznego wyraża zależność:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Wnioski:

a. dla niewielkich kątów wychylenia z położenia równowagi okres drgań wahadła matematycznego nie zależy od masy wahadła (masy kulki),

b. dla niewielkich kątów wychylenia z położenia równowagi okres drgań wahadła matematycznego nie zależy od wartości kąta wychylenia z położenia równowagi (tzw. izochronizm wahadła),

c. dla niewielkich kątów wychylenia z położenia równowagi okres drgań wahadła matematycznego jest wprost proporcjonalny do pierwiastka kwadratowego z jego długości. Oznacza to, że jeżeli na przykład długość wahadła wzrośnie dziewięć razy, to okres jego drgań wzrośnie trzy razy.

Uwaga:

a. Jeżeli wahadło zostanie umieszczone w windzie poruszającej się na kierunku pionowym z pewnym przyspieszeniem o wartości a, to:

$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g+a}}$ Podczas ruchu przyspieszonego do góry i opóźnionego w dół

$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g-a}}$ Podczas ruchu opóźnionego do góry i przyspieszonego w dół (a < g)

b. Jeżeli wahadło zostanie umieszczone w pojeździe poruszającym się w poziomie ze stałym przyspieszeniem o wartości a, to:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{\sqrt{g^2 + a^2}}}$$