Pochodna funkcji i jej zastosowanie w kinematyce.

Pochodna funkcji typu: $\boldsymbol{y = f(x)}$

Zapis symboliczny pierwszej pochodnej:

$$y' = f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx}$$

Zapis symboliczny drugiej pochodnej:

$$y'' = f''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{df(x)}{dx}\right) = \frac{d^2f(x)}{dx^2} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

Podstawowe własności:

$\boldsymbol{k}$ - stała (liczba)

Pochodna ze stałej: $\boldsymbol{f(x) = k}$

$$f'(x) = 0 \qquad np.\ f(x) = \frac{3^2 - 1}{0,(3)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0$$

Pochodna funkcji potęgowej: $\boldsymbol{f(x) = x^n}$

$$f'(x) = n \cdot x^{n-1} \qquad np.\ f(x) = x^3 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 3 \cdot x^2$$

Pochodna iloczynu stałej i dowolnej funkcji: $\boldsymbol{f(x) = k \cdot g(x)}$

$$f'(x) = k \cdot (g(x))' \qquad np.\quad f(x) = 7 \cdot x^5 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 7 \cdot 5 \cdot x^4 = 35 \cdot x^4$$

Pochodna sumy/różnicy dwóch (lub więcej) funkcji: $\boldsymbol{f(x) = g(x) \pm h(x)}$

$$f'(x) = g'(x) \pm h'(x) \qquad np.\ f(x) = x^4 - 2 \cdot x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 4 \cdot x^3 - 2$$

Pochodna ilorazu dwóch funkcji: $\boldsymbol{f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}}$

$$f'(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{\left(h(x)\right)^2} \qquad np.\ f(x) = \frac{x^2 + x}{4 \cdot x} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{(2 \cdot x + 1) \cdot 4 \cdot x - (x^2 + x) \cdot 4}{16 \cdot x^2} = \frac{4 \cdot x^2}{16 \cdot x^2} = \frac{1}{4}$$

Pochodna funkcji wykładniczej: $\boldsymbol{f(x) = a^x \quad a > 0 \;\; i \;\; a \neq 1}$

$$\boldsymbol{f'(x) = a^x \cdot lna \qquad np. \;\; f(x) = 3^x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 3^x \cdot ln3}$$

Pochodna funkcji eksponencjalnej: $\boldsymbol{f(x) = e^x = exp(x)}$ ($\boldsymbol{a = e \quad e - podstawa\ logarytmów\ naturalnych,\ e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cong 2{,}718}$)

$$\boldsymbol{f'(x) = e^x \qquad np. \;\; f(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = e^x \cdot lne = \; e^x \cdot 1 = \; e^x}$$

Pochodna funkcji logarytmicznej: $\boldsymbol{f(x) = log_a x \quad a > 0 \; i \;\; a \neq 1,\ x > 0}$

$$\boldsymbol{f'(x) = \frac{1}{x \cdot lna} \qquad np. \;\; f(x) = \; log_5 x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x \cdot ln5}}$$

Pochodna funkcji złożonej: $\boldsymbol{f(x) = g\big(h(x)\big)}$

$$\boldsymbol{f'(x) = \; g'\big(h(x)\big) \cdot h'(x) \qquad np. \;\; f(x) = (x^3 + 1)^2 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2 \cdot (x^3 + 1) \cdot (3 \cdot x^2 + 0) = \; 6 \cdot x^2 \cdot (x^3 + 1)}$$

$$\boldsymbol{f(x) = e^{g(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x) \qquad np. \;\; f(x) = e^{3 \cdot x^2} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = e^{3 \cdot x^2} \cdot 6 \cdot x}$$

Zastosowania pochodnych:

1. Funkcja $\boldsymbol{y = f(x)}$ może mieć ekstrema w punktach będących miejscami zerowymi jej pierwszej pochodnej. Jeżeli $\boldsymbol{f'(x) = 0}$ dla $\boldsymbol{x = x_o}$, to funkcja ma maksimum, gdy jej druga pochodna ma w tym punkcie wartość ujemną ($\boldsymbol{f''(x_o)} < 0$). Z kolei funkcja ma minimum w tym punkcie, jeżeli jej druga pochodna ma w tym punkcie wartość dodatnią ($\boldsymbol{f''(x_o)} > 0$).

   Przykład:

$$\boldsymbol{f(x) = 2 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2 - 12 \cdot x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 6 \cdot x^2 + 6 \cdot x - 12}$$

$$\boldsymbol{f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 6 \cdot x^2 + 6 \cdot x - 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad \big(\Delta = 324 \quad x_{o,1} = -2 \quad x_{o,2} = 1 \;\big)}$$

$$\boldsymbol{f''(x) = 12 \cdot x + 6 \quad \Rightarrow \quad f''\big(x_{o,1}\big) = f''(-2) = -18} < 0 \;\; \boldsymbol{max} \qquad \boldsymbol{f''\big(x_{o,2}\big) = f''(1) = 18} > 0 \;\; \boldsymbol{min}$$

2. Jeżeli dana jest zależność zmian położenia ciała od czasu: np. $\vec{r}(t),\ x(t)$, to:

- prędkość ciała jest pochodną zmian położenia ciała liczoną względem czasu:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \qquad v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

- przyspieszenie ciała jest pochodną zmian prędkości liczoną względem czasu:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} \qquad a_x(t) = \frac{dv_x(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx(t)}{dt}\right) = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

Przykład:

$$\vec{r}(t) = t^2 \cdot \vec{i} - 2 \cdot t \cdot \vec{j} + 3 \cdot \vec{k} = [t^2;\ -2 \cdot t;\ 3] \quad m$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = 2 \cdot t \cdot \vec{i} - t \cdot \vec{j} + 0 \cdot \vec{k} = [2 \cdot t;\ -2;\ 0] \quad m/s$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = 2 \cdot \vec{i} - 0 \cdot \vec{j} + 0 \cdot \vec{k} = [2;\ 0;\ 0] \quad m/s^2$$

$$x(t) = \frac{1}{3} \cdot t^3 + 4 \cdot t^2 - 10 \quad m$$

$$v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} = t^2 + 8 \cdot t + 0 \quad m/s$$

$$a_x(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx(t)}{dt}\right) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = 2 \cdot t + 8 \quad m/s^2$$