Pochodna funkcji dwóch zmiennych.

Przykładowe zadania na egzamin

1. Korzystając z definicji pochodnej cząstkowej pierwszego rzędu, oblicz te pochodne cząstkowe w podanym punkcie:

a. $f(x,y)=\frac{y}{x} \quad (x_o;\ y_o)=(1;\ -1)$ **b.** $f(x,y)=3\cdot x\cdot y-y \quad (x_o;\ y_o)=(0;\ 1)$

2. Korzystając z zasad różniczkowania, oblicz pochodne cząstkowe pierwszego rzędu następujących funkcji:

a. $f(x,y)=4\cdot y^2-3\cdot x^2+5$ **b.** $f(x,y)=\frac{3}{x\cdot y^2}$ **c.** $f(x,y)=\frac{ln(x-y)}{e^x}$

3. Oblicz wszystkie pochodne cząstkowe drugiego rzędu następujących funkcji:

a. $f(x,y)=5\cdot y^3-2\cdot x^2\cdot y^2+x^4$ **b.** $f(x,y)=\frac{y^2+x^2}{y\cdot x}$ **c.** $f(x,y)=sin(4\cdot x-y)$

4. Określ dziedzinę podanych poniżej funkcji i sprawdź, czy ich pochodne mieszane:

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y} \qquad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\partial x}$$

są takie same:

a. $f(x,y)=y\cdot sin(4\cdot x)$ **b.** $f(x,y)=\frac{1}{x^2}-\frac{x}{y^2}$ **c.** $f(x,y)=ln(y-x^2)$

5. Określ dziedzinę podanych poniżej funkcji i znajdź wszystkie ich ekstrema lokalne:

a. $f(x,y)=x^2+2\cdot y^2$ **b.** $f(x,y)=x^3+y^2-3\cdot x$ **c.** $f(x,y)=3\cdot y^3-x^4+9\cdot y$

Całka nieoznaczona i oznaczona

6. Sprawdź, czy podane poniżej funkcje F_1 i F_2 są funkcjami pierwotnymi dla podanych funkcji $f(x)$:

a. $F_1(x)=cos^2(x)-5 \quad F_2(x)=-cos(2\cdot x)+3 \quad f(x)=2\cdot sin(x)\cdot cos(x)$

b. $F_1(x)=\frac{4\cdot x}{2\cdot x^2+4} \quad F_2(x)=\frac{x}{2\cdot x^2+4} \quad f(x)=ln(2\cdot x^2+4)$

7. Wykorzystując tabelę całek nieoznaczonych ważniejszych funkcji elementarnych i podstawowe własności całek, oblicz następujące całki nieoznaczone:

a1. $\int x^9dx$ **a2.** $\int \sqrt[4]{x^6}dx$ **a3.** $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^7}}dx$

b1. $\int 4^xdx$ **b2.** $\int -4\cdot 2^xdx$ **b3.** $\int \frac{3^{-x}}{3^{-2\cdot x}}dx$

c1. $\int sin(5\cdot x)dx$ **c2.** $\int -sin(-2\cdot x)dx$ **c3.** $\int 5\cdot sin(3\cdot x)dx$

d1. $\int cos(3\cdot x)dx$ **d2.** $\int -cos\left(\frac{-x}{4}\right)dx$ **d3.** $\int 6\cdot cos(-4\cdot x)dx$

e1. $\int \frac{dx}{x^2+1}$ **e2.** $\int \frac{dx}{x^2+9}$ **e3.** $\int \frac{-2\cdot dx}{x^2+3}$

f1. $\int \frac{dx}{x^2-1}$ **f2.** $\int \frac{dx}{x^2-4}$ **f3.** $\int \frac{-3\cdot dx}{16-x^2}$

g1. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$ **g2.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-9}}$ **g3.** $\int \frac{-\sqrt{3}\cdot dx}{\sqrt{x^2-3}}$

h1. $\int \frac{dx}{\cos^2(2\cdot x)}$ **h2.** $\int \frac{-2\cdot dx}{\cos^2(6\cdot x)}$ **h3.** $\int \frac{-10\cdot dx}{-\cos^2(-5\cdot x)}$

i1. $\int \frac{dx}{\sin^2(3\cdot x)}$ **i2.** $\int \frac{\sqrt{2}\cdot dx}{\sin^2(\sqrt{2}\cdot x)}$ **i3.** $\int \frac{4\cdot dx}{-\sin^2\left(\frac{x}{4}\right)}$

8. Wyznacz następujące całki nieoznaczone:

a. $\int \frac{x^3-x+4}{\sqrt{x^3}}dx$ **b.** $\int \left(3\cdot x+\frac{2}{x}\right)\cdot\sqrt{x}dx$ **c.** $\int \frac{x^5+2\cdot x^3-2}{x^2}dx$

d. $\int \left(x^3+\sin(2\cdot x)\right)dx$ **e.** $\int \frac{4-x}{2+\sqrt{x}}dx$ **f.** $\int \frac{-3}{tgx}dx$

g. $\int \frac{\cos(2\cdot x)}{\cos^2 x}dx$ **h.** $\int tg\left(\frac{x}{4}\right)dx$ **i.** $\int (tg^2x-2)\,dx$

j. $\int \frac{-x^2}{x^2+1}dx$ **k.** $\int \frac{\cos(2\cdot x)\,dx}{\left(\sin(2\cdot x)\right)^2}$ **l.** $\int \frac{e^{-\frac{3}{2}\cdot x}+2}{e^{\sqrt{x}}}dx$

9. Całkując przez części i/lub przez podstawienie wyznacz następujące całki nieoznaczone:

a. $\int x\cdot\cos(x)\,dx$ **b.** $\int \ln x\,dx$ **c.** $\int (2\cdot x^4+1)^{50}\cdot 8\cdot x^3dx$

d. $\int 6\cdot x\cdot\sqrt{2+3\cdot x^2}\,dx$ **e.** $\int x\cdot e^x\,dx$ **f.** $\int e^{x^4}\cdot x^3dx$

g. $\int 6\cdot x\cdot\sqrt{2+3\cdot x^2}\,dx$ **h.** $\int e^x\cdot\sin(e^x)\,dx$ **i.** $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$

10. Oblicz wartość następujących całek oznaczonych:

a. $\int_{-2}^{1}\sqrt{x+1}dx$ **b.** $\int_{0}^{2}(2\cdot x^3-x^2+3)dx$ **c.** $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx$

d. $\int_{1}^{e}\frac{2\cdot dx}{x}$ **e.** $\int_{1}^{8}\frac{\sqrt[3]{x^4}}{x}dx$ **f.** $\int_{1}^{e}\frac{\sqrt{\ln x}}{2\cdot x}dx$

11. Oblicz pole powierzchni figury pod wykresem funkcji $f(x)$ w rozpatrywanym przedziale zmian wartości argumentu funkcji:

a. $f(x)=2\cdot x^2+3 \quad dla\ x\epsilon\ \langle -1;2\rangle$ **b.** $f(x)=3\cdot x-2 \quad dla\ x\epsilon\ \langle 3;5\rangle$

c. $f(x)=2^{x-1} \quad dla\ x\epsilon\ \langle 2;4\rangle$

12. Wykaż, że pole powierzchni ograniczone liniami: $f_1(x)=x+1$, $f_2(x)=-2\cdot x+4$, $f_3(x)=0$, ma wartość 3 jednostki kwadratowe. Wykorzystaj całki oznaczone.

13. Wykorzystując całki oznaczone wykaż, że pole powierzchni wspólnej dla parabol $f_1(x)=x^2+2$ i $f_2(x)=-x^2+4$ ma wartość równą 2,(6) jednostki kwadratowej.