

Doświadczalne wyznaczanie współczynnika sztywności (sprężystości) sprężyn i współczynnika sztywności zastępczej

Statyczna metoda wyznaczania współczynnika sztywności sprężyny. Wprowadzenie

Wartość współczynnika sztywności użytej sprężyny można wyznaczyć z dużą dokładnością metodą statyczną. W tym celu należy zawiesić pionowo sprężynę i najpierw zmierzyć jej długość początkową (bez obciążenia, liczoną od punktu zawieszenia do jej swobodnego końca) l_0 . Po jej obciążeniu obciążnikiem o znanej masie m_i , jej długość (mierzona między tymi samymi punktami układu, jak przy pomiarze wartości l_0) wzrośnie do l_i . Jeżeli sprężyna była nieruchoma, to ciężar obciążnika Q_i był równoważony przez siłę sprężystości $F_{s,i}$ (zgodnie z pierwszą zasadą dynamiki Newtona). Prawdziwa jest zatem zależność:

$$F_{s,i} = Q_i$$

Wartość ciężaru obciążnika można obliczyć wprost z zależności:

$$Q_i = m_i \cdot g$$

gdzie g jest wartością przyspieszenia ziemskiego ($g \approx 9,81 \text{ m/s}^2$).

Po doświadczalnym zbadaniu zależności wydłużenia sprężyny od wartości siły ją rozciągającej (tzn. ciężaru obciążników), można się przekonać, że są to wartości do siebie wprost proporcjonalne.

$$F_i = Q_i \sim |\Delta l_i|$$

Wynika stąd, że również wartość siły sprężystości jest wprost proporcjonalna do wydłużenia sprężyny (licząc to wydłużenie od położenia, gdy była ona nieobciążona). Zatem wartość tej siły można wyrazić następująco:

$$F_{s,i} = k \cdot \Delta l_i = k \cdot |l_i - l_0|$$

Współczynnik proporcjonalności k jest nazywany współczynnikiem sprężystości (sztywności) sprężyny. Jego wartość zależy od liczby zwojów sprężyny, średnicy zwoju, rodzaju materiału, z której wykonano sprężynę i średnicy drutu.

Podstawiając zależności wyrażające siłę sprężystości i siłę rozciągającą sprężynę do związku wynikającego z pierwszej zasady dynamiki, otrzymuje się zależność wyznaczyć szukaną wartość współczynnika sztywności sprężyny:

$$k = \frac{m_i \cdot g}{|l_i - l_0|}$$

Ponieważ pomiar taki jest obarczony pewną niepewnością, to w celu jej zminimalizowania należy wyznaczyć wartość tego współczynnika dla kilku różnych mas, a następnie obliczyć jego wartość średnią oraz maksymalną niepewność średniej arytmetycznej.

Pomiary i obliczenia

1. Zamocuj w statywie pierwszą z badanych sprężyn. Odczytaj położenie jej końca. Zanotuj tę wartość w tabeli nr 1, dla wszystkich sześciu użytych mas obciążników.

2. Dla kolejnych zadanych mas obciążników odczytaj położenie końca obciążonej badanej sprężyny. Zanotuj te wartości w tabeli nr 1 dla wszystkich sześciu mas użytych obciążników.

3. Oblicz wartości ciężarów użytych obciążników (do drugiego miejsca po przecinku), przyjmując, że:

$$g \cong (9,8 \pm 0,1) \frac{m}{s^2}$$

Wartości ciężarów obciążników zapisz w odpowiednim miejscu w tabeli 1.

4. Oblicz wartości wydłużeń sprężyny odpowiadających odpowiednim ciężarom obciążników dla każdej z badanych sprężyn. Wartości te zapisz w odpowiednim miejscu w tabeli 1.

5. Przepisz wartości użytych ciężarów obciążników i odpowiadających im wydłużeń sprężyny do tabeli nr 2.

6. Dla każdej z użytych sprężyn i dla każdego ciężaru obciążnika oblicz wartość współczynnika sztywności (sprężystości) badanej sprężyny. Wartości te zaokrąglaj do drugiego miejsca po przecinku. Wynik zapisz w odpowiednim miejscu w tabeli nr 2.

7. Oblicz wartość średnią współczynnika sztywności badanej sprężyny oraz wartość jego maksymalnej niepewności bezwzględnej. (patrz: NT. Niepewność pomiaru bezpośredniego). Zapisz wynik końcowy pomiaru dla każdej z badanych sprężyn (patrz: NT. Zasady zaokrąglania wyników pomiarów i ich niepewności).

8. Narysuj wykres zależności wartości siły rozciągającej badaną sprężynę (ciężaru obciążników) od wywołanego przez działanie tej siły wydłużenia badanej sprężyny, tzn. wykres: $F = f(\Delta l)$. Na jednym układzie współrzędnych narysuj tę zależność dla obu badanych sprężyn. Zaznacz prostokąty niepewności pomiarowych. Przyjmij, że:

$$\Delta u(F) = \Delta u(Q_i) = Q_i \cdot \left\{ \frac{\Delta u(m_i)}{m_i} + \frac{\Delta u(g)}{g} \right\}$$

$$\Delta u(m_i) = 2\% \cdot m_i$$

9. Korzystając z regresji liniowej oblicz: wartość współczynnika kierunkowego otrzymanej prostej i wartość maksymalnej niepewności bezwzględnej tego współczynnika. Ustal sens fizyczny tego współczynnika. Zapisz wynik końcowy współczynnika sztywności dla każdej z badanych sprężyn. Porównaj te wartości. Porównaj te wartości z otrzymanymi w punkcie 7.

10. Sformułuj następujące wnioski:

- a.** Pomiar, której z wielkości fizycznych należałoby przede wszystkim poprawić, aby zmniejszyć wartość niepewności bezwzględnej pomiaru współczynnika sztywności badanych sprężyn?
- b.** Oblicz wartość współczynnika korelacji pomiędzy wydłużeniem sprężyny a siłą ją rozciągającą. Co wynika z wartości tego współczynnika?
- c.** Czy zależność pomiędzy wydłużeniem badanych sprężyn a siłą je rozciągających jest liniowa?
- d.** Która z badanych sprężyn miała większą wartość współczynnika sztywności?
- e.** Ile teoretycznie powinna wynieść wartość wydłużenia każdej z badanych sprężyn, gdyby użyto obciążnika o masie 1 kilogram?
- f.** Oblicz wartość pracy jaką należy wykonać, aby każdą z badanych sprężyn rozciągnąć o 20 cm.

Dynamiczna metoda wyznaczania współczynnika sztywności zastępczej układu dwóch sprężyn połączonych szeregowo.

Wprowadzenie

W przypadku układu kilku sprężyn ze sobą połączonych, można mu przypisać tzw. współczynnik sztywności zastępczej k_z . W skrajnych przypadkach sprężyny mogą być ze sobą połączone szeregowo lub równolegle (w przypadkach pośrednich mamy do czynienia z tzw. połączeniem mieszanym).

Przy połączeniu szeregowym, odwrotność współczynnika sztywności zastępczej jest sumą odwrotności współczynników sztywności poszczególnych sprężyn w tym połączeniu, tzn.:

$$\frac{1}{k_{z,sz}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots + \frac{1}{k_n} \Rightarrow k_{z,sz} = \frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots + \frac{1}{k_n}}$$

- 1.** Połącz sprężyny ze sobą szeregowo, zawieś na statywie i obciąż niewielką masą.
- 2.** Wychyl układ sprężyn (o około 2 ÷ 3 cm) z położenia równowagi i zmierz stoperem czas 10 pełnych drgań układu sprężyn. Pomiarów czasów drgań (dla danej masy obciążnika) powtórz 5 razy. Wyniki pomiarów zapisz w tabelce nr 3.
- 3.** Zwiększ masę obciążników i powtórz czynności wymienione w punkcie 2.
- 4.** Zbadaj połączenie szeregowo dla 5 ÷ 6 różnych mas obciążników.

Pomiary i obliczenia

- 1.** Znając wartości współczynników sztywności użytych sprężyn (wyznaczonych metodą statyczną) oblicz przewidywaną wartość współczynnika sztywności zastępczej połączenia szeregowego:

$$\frac{1}{k_{z,sz}^{(t)}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

- 2.** Na podstawie przeprowadzonych pomiarów okresów drgań układu sprężyn, oblicz współczynnik sztywności zastępczej badanego układu dla każdej z użytych mas obciążników:

$$k_{z,sz,i}^{(d)} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot m_i}{T_{sz,i}^2}$$

- 3.** Oblicz średnią wartość współczynnika sztywności zastępczej badanego układu sprężyn $k_{z,sz,\bar{s}}^{(d)}$ i maksymalnej niepewności bezwzględnej takiego pomiaru. Zapisz poprawnie wynik końcowy pomiaru.

- 4.** Oblicz, o ile procent różnią się wartości współczynników sztywności $k_{z,sz,\bar{s}}^{(d)}$ (wyznaczona doświadczalnie) z wartością wyznaczoną z wzoru teoretycznego $k_{z,sz}^{(t)}$.

Tabela 1. *Badanie zależności wydłużenia sprężyny od wartości siły ją rozciągającej.*

Numer pomiaru	Masa obciążników		Siła rozciągająca sprężynę (ciężar obciążników)	Położenie końca nieobciążonej sprężyny	Położenie końca sprężyny po jej obciążeniu	Wydłużenie sprężyny po jej obciążeniu	
	i	m_i	$Q_i = m_i \cdot g$	l_0	l_i	$\Delta l_i = l_i - l_0$	
Numer użytej sprężyny	---	g kg	N	mm	mm	mm	m
1	1.						
	2.						
	3.						
	4.						
	5.						
	6.						
2	1.						
	2.						
	3.						
	4.						
	5.						
	6.						

Tabela 2. Wyznaczenie współczynnika sztywności badanych sprężyn.

Numer pomiaru	Siła rozciągająca sprężynę (ciężar obciążników)		Wydłużenie sprężyny po jej obciążeniu		Obliczona wartość współczynnika sztywności	Średnia wartość wyznaczonego współczynnika sztywności
	$Q_i = m_i \cdot g$	$\Delta l_i = l_i - l_0 $				
Numer użytej sprężyny	i	$Q_i = m_i \cdot g$	mm	m	$k_i = \frac{Q_i}{\Delta l_i}$	k_{sr}
	---	N			N/m	N/m
1	1.					
	2.					
	3.					
	4.					
	5.					
	6.					
2	1.					
	2.					
	3.					
	4.					
	5.					
	6.					

Tabela 3. Wyznaczenie współczynnika sztywności zastępczej połączenia szeregowego sprężyn.

Numer pomiaru	Masa obciążnika		Zmierzony czas 10 pełnych drgań badanego układu sprężyn dla i -tej masy obciążnika	Średni zmierzony czas 10 pełnych drgań badanego układu sprężyn dla i -tej masy obciążnika	Zmierzony średni okres drgań badanego układu sprężyn dla i -tej masy obciążnika	Obliczona wartość współczynnika sztywności zastępczej badanego układu sprężyn dla i -tej masy obciążnika	Średnia wartość współczynnika sztywności zastępczej badanego układu sprężyn
	i	m_i	$t_{i,j,10}$	$t_{i,j,sz}$	$T_{i,sz}$	$k_{z,sz,i}$	$k_{z,sz,śr}$
[-]	[g]	[kg]	[s]	[s]	[s]	[N/m]	[N/m]
1.			$j=1$				
			$j=2$				
			$j=3$				
			$j=4$				
			$j=5$				
2.			$j=1$				
			$j=2$				
			$j=3$				
			$j=4$				
			$j=5$				
3.			$j=1$				
			$j=2$				
			$j=3$				
			$j=4$				
			$j=5$				
4.			$j=1$				
			$j=2$				
			$j=3$				
			$j=4$				
			$j=5$				
5.			$j=1$				
			$j=2$				
			$j=3$				
			$j=4$				
			$j=5$				
6.			$j=1$				
			$j=2$				
			$j=3$				
			$j=4$				
			$j=5$				