Dopasowanie prostej do wyników pomiarów.

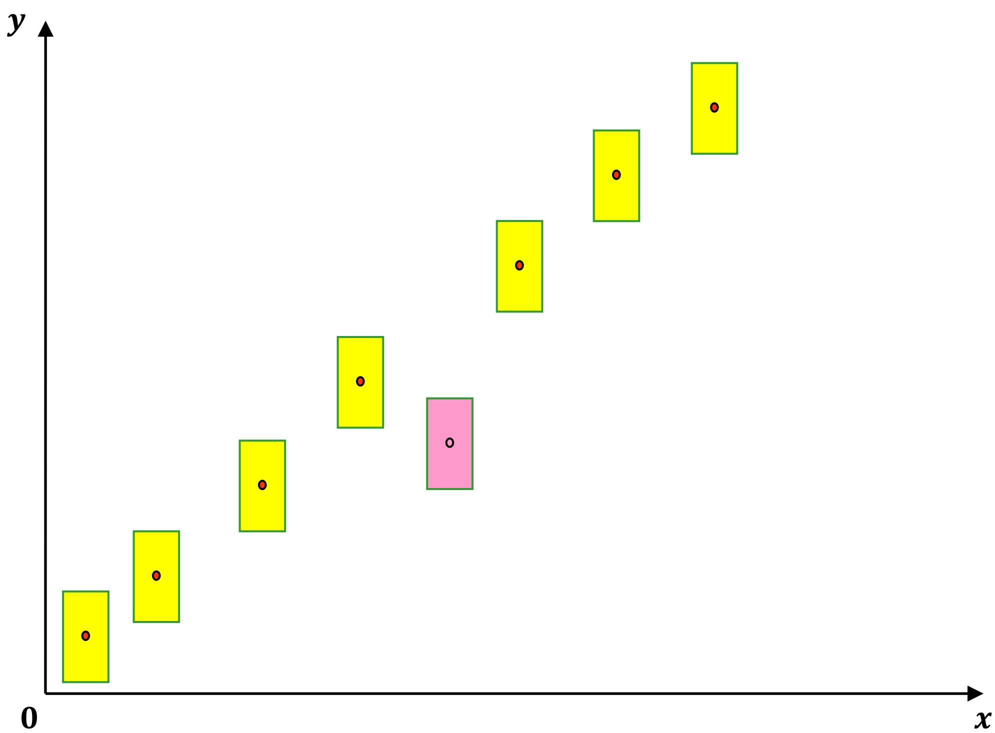
Graficzna analiza zależności liniowej $y = f(x)$

Założenie: każdy z pomiarów obarczony jest taką samą niepewnością pomiarową (takiej samej wielkości prostokąty niepewności). Wiemy, że badana zależność jest liniowa lub otrzymany wykres sugeruje taką zależność, zatem jej przebieg powinien mieć zapis: $\boldsymbol{y = a \cdot x + b}$.

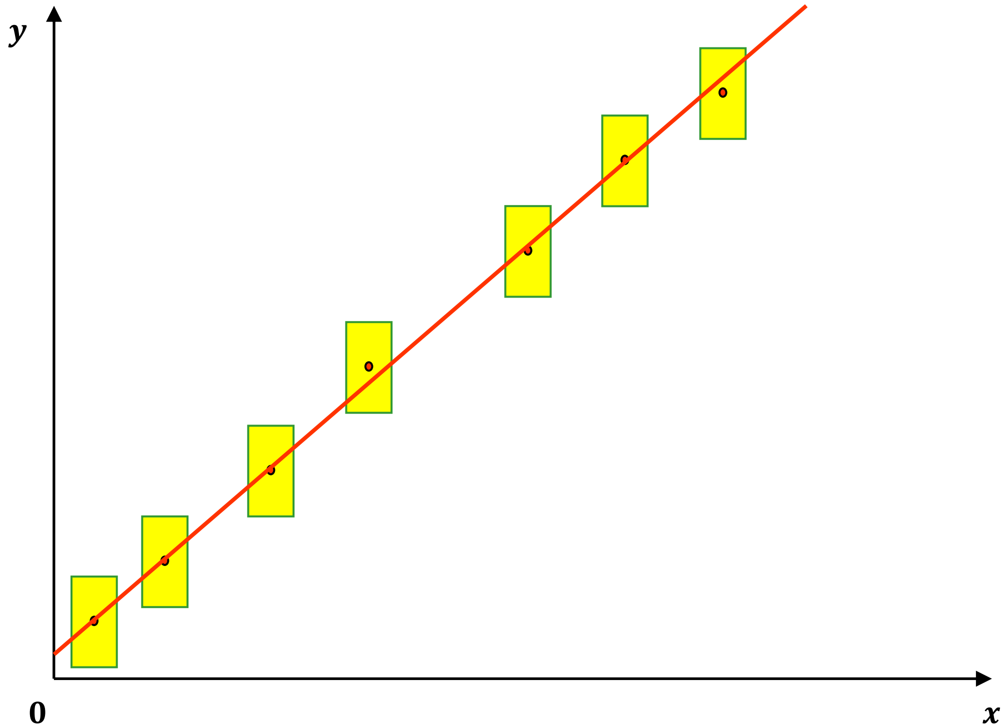
Problem: jak obliczyć wartości współczynników $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ oraz ich niepewności.

Sposób postępowania:

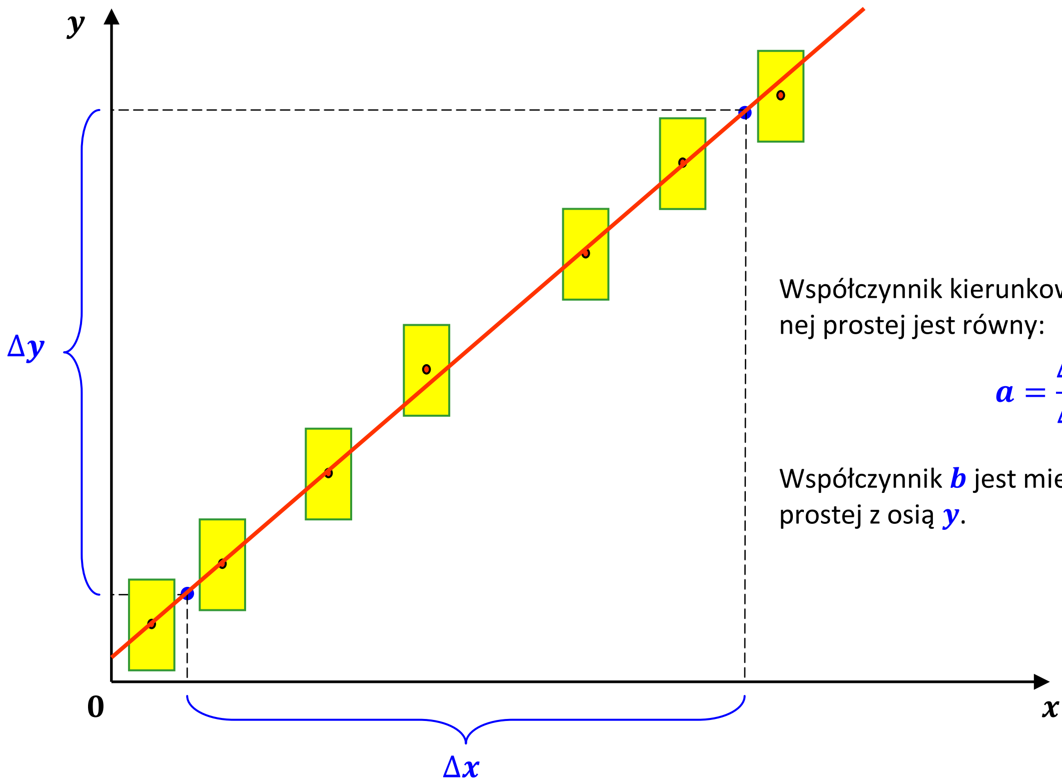
1. narysowanie układu współrzędnych, wyskalowanie obu osi (rodzaj wielkości fizycznych, jednostki wielkość działki elementarnej),
2. naniesienie wszystkich punktów pomiarowych i ich niepewności. Jeżeli, któryś z pomiarów znacznie odbiega od przebiegu linii wzdłuż której układają się pozostałe, to należy go odrzucić jako błąd gruby (na poniższym wykresie jest to prostokąt oznaczony kolorem pomarańczowym).



3. Jeżeli punkty układają się wzdłuż linii prostej (ocena "na oko"!), to rysuje się linię prostą tak prowadzoną, aby przechodziła przynajmniej przez 70%prostokątów i suma odległości współrzędnych punktów pomiarowych od tej linii była po obu stronach taka sama ("na oko"!). Jest to tzw**. linia najlepszego dopasowania** (linia czerwona na wykresie).



4. Określamy **szeroki** przedział wartości zmiennej niezależnej (argumentu) Δx i odpowiadający temu przyrost wartości zmiennej zależnej (wartości funkcji) Δy .



Współczynnik kierunkowy a tak narysowanej prostej jest równy:

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Współczynnik b jest miejscem przecięcia prostej z osią y.

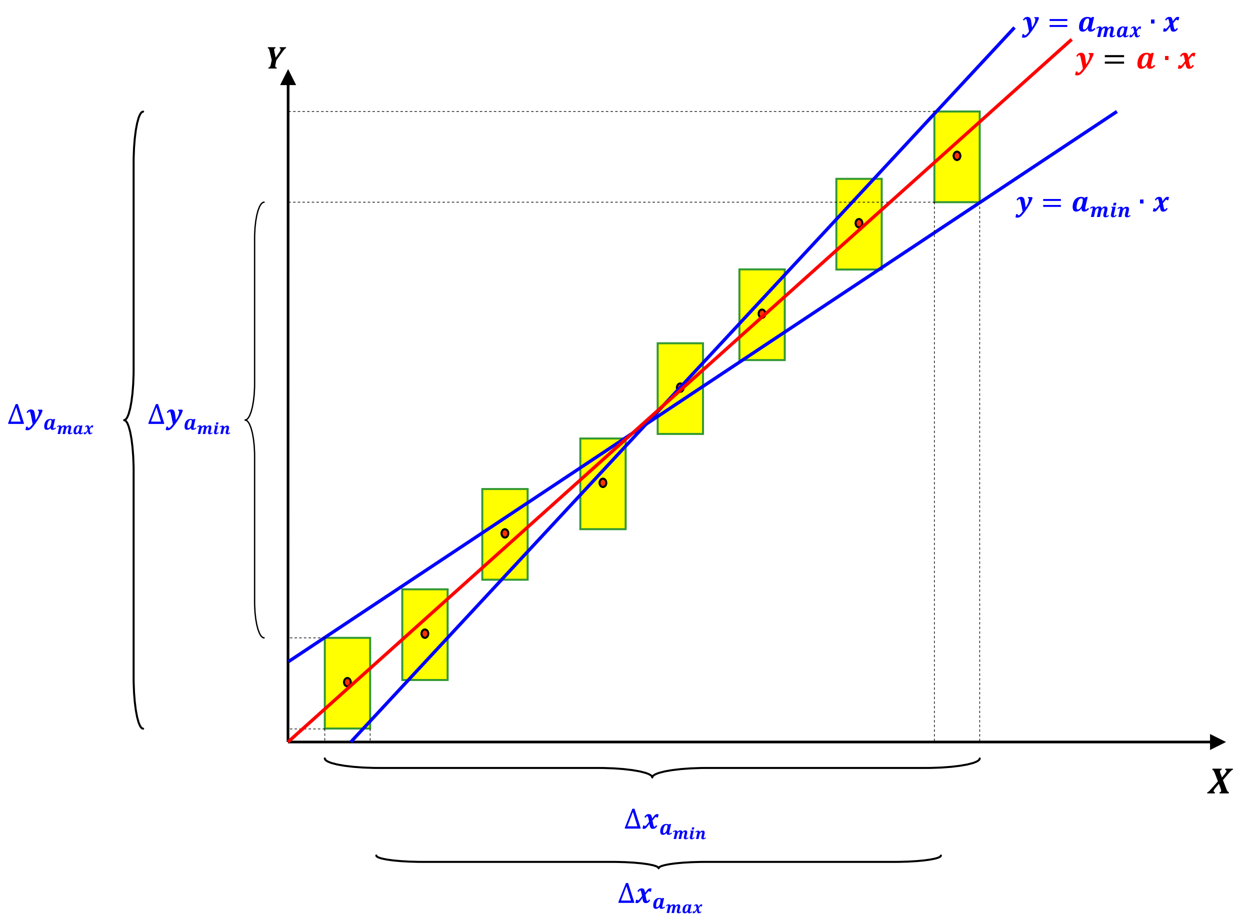
Uwaga: **praktycznie nigdy współczynnik kierunkowy prostej a nie jest bezpośrednio równy tangensowi kąta nachylenia prostej (określonego względem osi x i odczytanemu kątomierzem!).**

5. Graficzne szacowanie wartości niepewności współczynników a i b.

5.1. Wykres zależności liniowej przechodzi przez punkt $(0;0)$

Jeżeli wiadomo, że zależność $y = f(x)$ jest liniowa i przechodzi przez punkt $(0;0)$, to dla $x = 0$ zachodzi $y = 0$. Oznacza to, że dla szukanej zależności $b = 0$ i $y = a \cdot x$. Na przykład zależność natężenia prądu płynącego przez odbiornik od przyłożonego napięcia elektrycznego między jego końcami. Wtedy dla $U = 0$ mamy $I = 0$.

Wybieramy dwa punkty końcowe i prowadzimy dwie proste o największym i najmniejszym kącie nachylenia. Proste te powinny przechodzić przez przeciwległe wierzchołki skrajnych prostokątów niepewności, tak jak pokazano poniżej.



Wtedy:

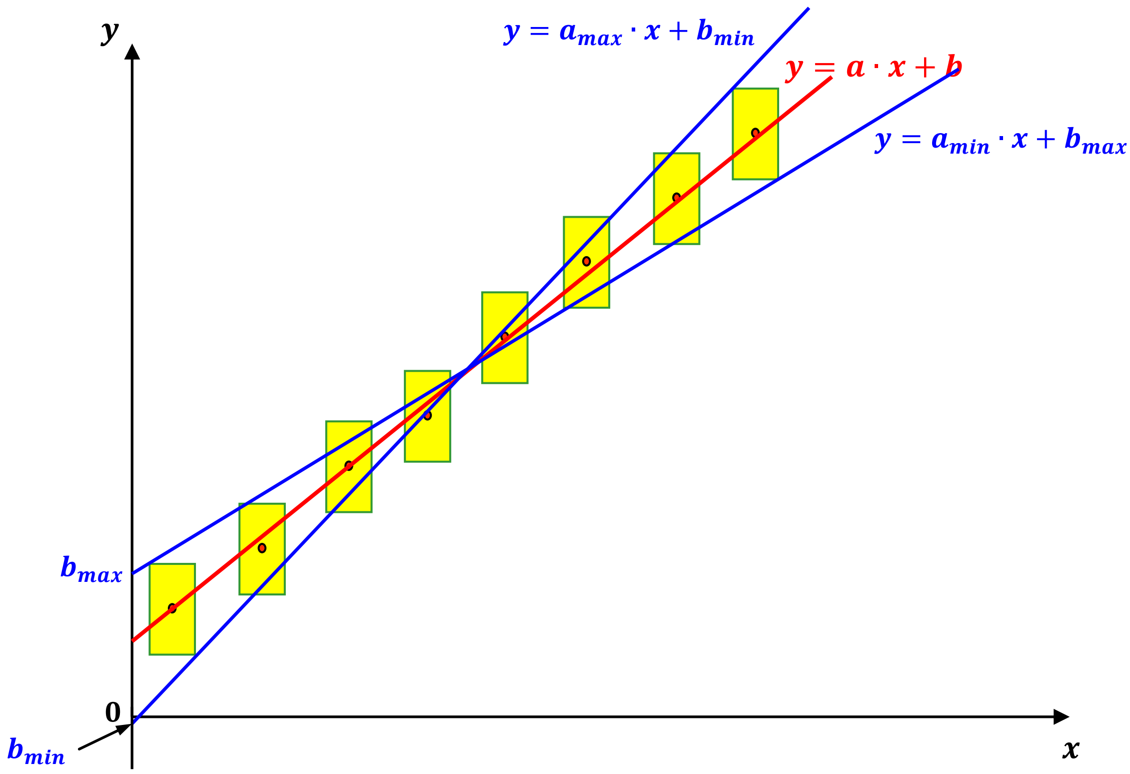
$$a_{min} = \frac{\Delta y_{a_{min}}}{\Delta x_{a_{min}}} \quad i \quad a_{max} = \frac{\Delta y_{a_{max}}}{\Delta x_{a_{max}}}$$

oraz:

$$|\Delta u(a)| = \frac{1}{2} \cdot |a_{max} - a_{min}| \qquad [2]$$

5.2. Wykres zależności liniowej nie przechodzącej przez punkt $(0;0)$

Jeżeli wiadomo, że zależność $\boldsymbol{y = f(x)}$ jest liniowa i nie przechodzi przez punkt $(\mathbf{0};\mathbf{0})$, to dla $\boldsymbol{x = 0}$ zachodzi $\boldsymbol{y \neq 0}$. Oznacza to, że dla szukanej zależności $b \neq \mathbf{0}$ i $\boldsymbol{y = a \cdot x + b}$. Na przykład zależność odległości ciała (poruszającego się ruchem jednostajnym prostoliniowym) od wybranego punktu odniesienia w funkcji czasu, jeżeli w chwili początkowej odległość od tego punktu była niezerowa. Narysować należy proste o maksymalnym $(\boldsymbol{a_{max}})$ i minimalnym $(\boldsymbol{a_{min}})$ nachyleniu mieszczące się w granicach skrajnych prostokątów niepewności pomiarowych, jak zostało pokazane poniżej.



Wtedy:

$$|\Delta u(b)| = \frac{1}{2} \cdot |b_{max} - b_{min}|$$

Sposób wyznaczenia niepewności współczynnika $\boldsymbol{a}$ jest taki sam, jak w punkcie 5.1.

Uwaga:

a. Aby bezspornie rozstrzygnąć, czy rozpatrywana zależność ma charakter liniowy, należy obliczyć tzw. współczynnik korelacji dany zależnością:

$$r_{x,y} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}) \cdot (y_i - \overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2}} \qquad r_{x,y} \in [-1;1]$$

Jeśli:

- $r_{x,y} > 0$ **to korelacja jest dodatnia, tzn. wzrostowi wartości** x **towarzyszy wzrost wartości** y **(funkcja rosnąca),**
- $r_{x,y} < 0$ **to korelacja jest ujemna, tzn. wzrostowi wartości** x **towarzyszy spadek wartości** y **(funkcja malejąca),**
- **im wartość** $|r_{x,y}|$ **jest bliższa jeden, tym silniejsza jest zależność liniowa,**
- zazwyczaj przyjmuje się, że:
    - $|r_{x,y}| \leq 0,2$ **brak związku liniowego,**
    - $(|r_{x,y}| \in (0,2; 0,4]$ **słaba zależność liniowa,**
    - $(|r_{x,y}| \in (0,2; 0,7]$ **umiarkowana zależność liniowa,**
    - $(|r_{x,y}| \in (0,7; 0,9]$ **dość silna zależność liniowa,**
    - $(|r_{x,y}| \in (0,9; 1,0)$ **bardzo silna zależność liniowa,**
    - $r_{x,y} = 1$ to jest to zależność ściśle liniowa rosnąca, jeżeli $r_{x,y} = -1$ jest to zależność ściśle liniowa malejąca.

b. **Jeżeli można uznać rozpatrywaną zależność za liniową** ($|r_{x,y}|$ ma wartość bliską 1), **to wartości współczynników** a i b **można obliczyć analitycznie tzw.** ***metodą najmniejszych kwadratów***. **Odpowiednie wzory można znaleźć w ogólnodostępnej literaturze. Wartości obu współczynników, jak i ich niepewności można obliczyć za pomocą tzw. regresji liniowej. Odpowiedni program zawiera np. Excel.**