

Podstawy niepewności pomiarowych

Ćwiczenia

1. Zaokrąglij podane wartości pomiarów i ich niepewności.

$$v = (334,567 \pm 18,067) \text{ m/s}$$

$$d = (153\,450\,000 \pm 1\,034\,000) \text{ km}$$

$$I = (0,0004278 \pm 0,0000556) \text{ A}$$

$$t = (2,0555 \pm 0,2014) \text{ s}$$

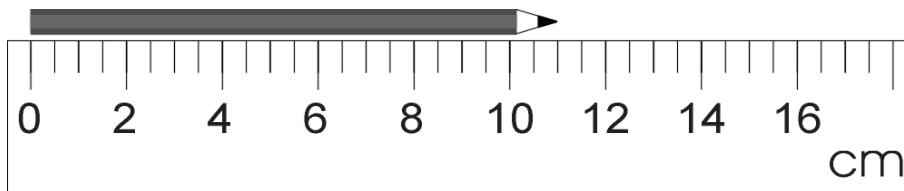
$$p = (1013,74 \pm 20,45) \text{ hPa}$$

$$g = (9,75555 \pm 0,30256) \text{ m/s}^2$$

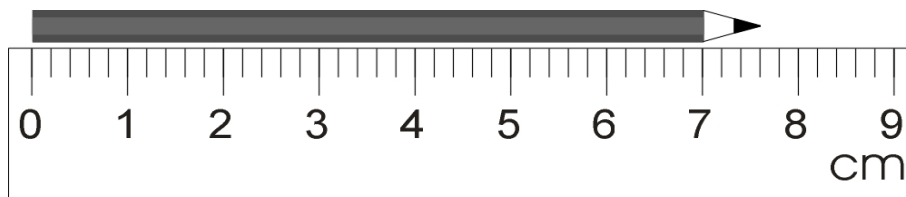
2. Dla każdego z poniższych rysunków określ:

- wartość długości kredki,
- wartość maksymalnej niepewności bezwzględnej pomiaru,
- zapisz poprawnie wynik pomiaru i jego niepewność,
- oblicz wartość maksymalnej niepewności względnej.

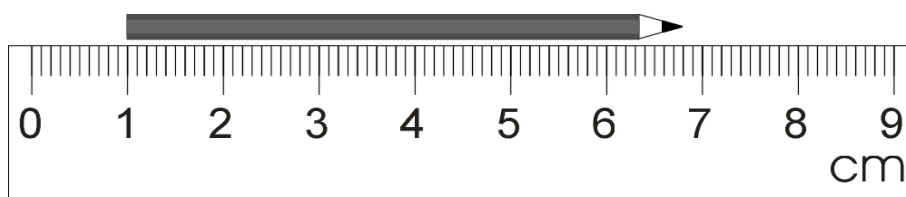
2.1.



2.2.



2.3.



3. Podane poniżej wzory zapisz najpierw w postaci iloczynowej a następnie podaj wzory pozwalające obliczyć wartość maksymalnej niepewności bezwzględnej pomiaru mierzonej pośrednio wielkości fizycznej. Wykorzystaj zależność [3]; temat: Niepewność pomiaru pośredniego.

$$a = \frac{F_w}{m} =$$

$$\Delta u(a) =$$

$$p = \frac{m \cdot s}{t} =$$

$$\Delta u(p) =$$

$$W = \frac{U^2 \cdot t}{R} =$$

$$\Delta u(W) =$$

$$F = \frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{r^2} =$$

$$\Delta u(F) =$$

$$v_{II} = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M}{r}} =$$

$$\Delta u(v_{II}) =$$

$$R = \frac{m \cdot v}{q \cdot B} =$$

$$\Delta u(R) =$$

Przypadki dla chętnych (wymagają wiadomości wykraczających poza zakres rozszerzony!)

$$\alpha = \frac{R_2 - R_1}{R_1 \cdot (T_2 - T_1)} \Rightarrow \Delta u(\alpha) =$$

$$s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \Rightarrow \Delta u(s) =$$

4. Napisz wzory pozwalające obliczyć wartość maksymalnej niepewności bezwzględnej mierzonej pośrednio wielkości fizycznej (dla poniższych przypadków). Wykorzystaj zależność [5], temat: Niepewność pomiaru pośredniego.

$$V = 6 \cdot V_1 - 2 \cdot V_3 + \frac{1}{3} \cdot V_2 \Rightarrow \Delta u(V) =$$

$$M = \frac{m_1}{4} \cdot V_1 - m_3 - 3 \cdot m_3 \Rightarrow \Delta u(M) =$$

$$l = 2 \cdot l_1 + \frac{l_2}{8} - \sqrt{2} \cdot l_3 \Rightarrow \Delta u(l) =$$

5. Rozwiązując zadania 5.1 ÷ 5.4 wykorzystaj wniosek **a** związany z wzorem [7]; temat: **Niepewność pomiaru pośredniego**.

5.1. Długości krawędzi pewnego prostopadłościanu zostały zmierzone z maksymalnymi niepewnościami względnymi wynoszącymi 4%, 2% i 6%. Napisz wzór (na symbolach) na maksymalną niepewność względną pomiaru objętości prostopadłościanu i oblicz jej wartość. [odp. 12%]

5.2. Moc wydzielona w grzałce (o stałym oporze elektrycznym R) znajdującej się pod napięciem elektrycznym U , może być wyrażona zależnością:

$$P = \frac{U^2}{R}$$

Podczas pomiaru zmierzono, że maksymalna niepewność względna pomiaru napięcia elektrycznego wyniosła 4%, natomiast pomiaru oporu elektrycznego 5%. Napisz wzór (na symbolach) na maksymalną niepewność względną pomiaru mocy i jej wartość. [odp. 13%]

5.3. Okres drgań sprężyny (współczynnika sprężystości k) obciążonej odważnikiem o masie m , wyraża zależność (dla niewielkich wychyleń z położenia równowagi):

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Maksymalna niepewność względna pomiaru masy wyniosła 6%, natomiast współczynnika sztywności sprężyny 14‰ (promili!). Napisz wzór (na symbolach) na maksymalną niepewność względną pomiaru okresu drgań sprężyny i jej wartość. [odp. 3,7%]

5.4. Wartość przyspieszenia ziemskiego można wyznaczyć korzystając z wahadła matematycznego. Okres jego drgań (dla małych kątów wychylenia z położenia równowagi) określa zależność:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$$

gdzie: l - długość wahadła, g - przyspieszenie ziemskie. Zapisz wzór na maksymalną niepewność względną pomiaru przyspieszenia ziemskiego (zgodną z wzorem [7]). Oblicz wartość tej niepewności, jeżeli maksymalna niepewność pomiaru długości wahadła wynosiła 2%, natomiast pomiaru okresu drgań 4%. Pomiń wpływ "dokładności" przyjętej wartości liczby π . [odp. 10%]

6. Mierząc śrubą mikrometryczną średnicę d pewnego drutu otrzymano następujące wyniki (wyrażone w milimetrach): 5,45; 5,48; 5,43; 5,50; 5,46; 5,48; 5,95; 5,46; 5,44; 5,42; 5,46. Wartość działki elementarnej na mikrometrze wynosiła $10^{-5} m$.

a. Przyjrzyj się uważnie wynikom i oblicz wartość średniej średnicy drutu (zaokrąglij wynik).

b. Oblicz wartość maksymalnej niepewności bezwzględnej pomiaru średnicy drutu metodą uproszczoną. Skorzystaj z uwagi f ; temat: **Niepewność pomiaru bezpośredniego**. Zapisz wynik końcowy pomiaru wraz z jego niepewnością bezwzględną.

c. Oblicz wartość maksymalnej niepewności względnej drutu.

- d. **(dla chętnych)** Oblicz wartość maksymalnej niepewności bezwzględnej pomiaru średnicy drutu za pomocą odchylenia standardowego. Jeżeli masz dużo wolnego czasu i cierpliwości, to skorzystaj z wzoru [3]; temat: **Niepewność pomiaru bezpośredniego**. Jeżeli umiesz, to skorzystaj z odpowiedniej funkcji w Excelu lub użyj kalkulatora liczącego parametry statystyczne. Zapisz wynik końcowy pomiaru wraz z jego niepewnością bezwzględną.

7. Pewien miliwoltomierz analogowy ("wskazówkowy") ma klasę dokładności 2,5, dolny zakres skali równy 0 mV, natomiast górny zakres równy 100 mV, a wartość działki elementarnej na skali wynosi 2 mV.

- a. Oblicz maksymalną niepewność bezwzględną wskazania przyrządu (wzór [1]; temat: **Niepewność pomiaru bezpośredniego**).

- b. Oblicz względną maksymalną niepewność pomiarów napięcia o wartościach 20 mV i 80 mV. Jaki praktyczny wniosek z tego wynika?

8. Mierząc średnie przyspieszenie samochodu (ruszającego z miejsca) posłużono się wzorem:

$$a = \frac{v^2}{2 \cdot s}$$

gdzie: s - przebyta droga, v - prędkość końcowa.

W wyniku pomiarów otrzymano następujące wartości: $v = (72,0 \pm 5,4) \frac{km}{h}$, $s = (100 \pm 1) m$.

- a. Oblicz zmierzoną doświadczalnie wartość przyspieszenia samochodu w m/s^2 (nie zaokrąglaj wyniku!).

- b. Oblicz niepewności względne pomiaru przebytej drogi i prędkości końcowej.

- c. Napisz wzór wyjściowy w postaci iloczynowej.

- d. Napisz wzór pozwalający obliczyć wartość maksymalnej niepewności bezwzględnej pomiaru.

- e. Dla podanych wartości mierzonych bezpośrednio wielkości fizycznych (tj. prędkości i drogi) oblicz wartość maksymalnej niepewności bezwzględnej. Zaokrąglij otrzymaną wartość niepewności.

- f. Zaokrąglij obliczoną w punkcie „a” wartość średniego przyspieszenia ciała.

- g. Napisz ostateczne wyniki pomiaru w postaci: $a = ([\text{zmierzona wartość przyspieszenia}] \pm [\text{wartość maksymalnej niepewności bezwzględnej pomiaru}])$.

- h. Napisz wzór na maksymalną niepewność względną pomiaru i oblicz wartość tej niepewności.

9. (dla chętnych) Mierząc czas trwania spadku swobodnego stalowej kulki z wysokości 30 m, otrzymano następujące wyniki (w sekundach): 2,6; 2,2; 2,8.

a. Oblicz średni czas spadania oraz jego odchylenie standardowe (uwzględnij współczynniki poprawkowe Studenta-Fishera dla poziomu istotności równego 95%).

b. Oblicz wartość maksymalnej niepewności bezwzględnej średniego czasu spadania.

c. Pomiar wysokości h z jakiej spadało ciało miał maksymalną niepewność względną równą 3%. Jeżeli opory powietrza były zaniedbywalne, to prawdziwa była zależność:

$$h = \frac{g \cdot t^2}{2}$$

gdzie: g - przyspieszenie ziemskie.

Oblicz wyznaczoną doświadczalnie wartość przyspieszenia ziemskiego oraz jego maksymalną niepewność bezwzględną i względną.

d. Zapisz wynik końcowy pomiaru przyspieszenia ziemskiego.

10. Badając opór elektryczny pewnego odbiornika sporządzono jego charakterystykę prądowo-napięciową. Niepewność pomiaru natężenia prądu wynosiła $0,01\text{ A}$, natomiast napięcia elektrycznego pod jakim się znajdował $0,02\text{ V}$. Wyniki pomiarów zestawiono w poniższej tabeli. Przyjmij, że opór elektryczny miał stałą wartość.

Napięcie elektryczne $[V]$	1,8	3,6	6,2	9,4	11,8	15,4	17,6	20,4	23,2
Natężenie prądu $[I]$	0,90	0,19	0,27	0,41	0,56	0,68	0,82	0,94	1,01

- Na papierze milimetrowym lub za pomocą arkusza kalkulacyjnego, przygotuj układ współrzędnych $U(I)$, opisz i wyskaluj osie, nanieś punkty pomiarowe i ich niepewności (narysuj prostokąty niepewności).
- Narysuj krzywą najlepszego dopasowania.
- Biorąc dwa (odległe od siebie) punkty z tej linii, oblicz wartość badanego oporu elektrycznego.
- Narysuj (na sporządzonym wcześniej wykresie) dwie proste o największym i najmniejszym kącie nachylenia. Oblicz ich wartości i następnie niepewność współczynnika kierunkowego prostej. Jaki jest sens fizyczny tego współczynnika?
- Zapisz równanie narysowanej linii.
- Znając wartość współczynnika kierunkowego i jego niepewność, oblicz wartość szukanego oporu i jego niepewność. Zapisz poprawnie wynik końcowy pomiaru.

g. Oblicz względną niepewność pomiaru oporu elektrycznego badanego odbiornika.

h. **(dla chętnych)** Oblicz wartość współczynnika korelacji pomiędzy napięciem elektrycznym a natężeniem prądu. Pokaż wykonane obliczenia wartości pośrednich (najprościej w tabelce wykonanej w Excelu).

12. Badając zależność prędkości samochodu od czasu trwania jego otrzymano wyniki pokazane w poniższej tabeli:

Czas trwania badanego ruchu [s]	1,1	1,8	2,8	4,2	5,0	6,2	7,5	8,3	9,1
Zmierzona prędkość samochodu [m/s]	28,6	23,8	20,8	28,0	14,4	11,0	8,2	5,6	2,2

Przyjmij, że niepewność pomiaru czasu wynosiła **0,1 s** a pomiaru prędkości **0,2 m/s**.

- a. Na papierze milimetrowym lub za pomocą arkusza kalkulacyjnego, przygotuj układ współrzędnych $v(t)$, opisz i wyskaluj osie, nanieś punkty pomiarowe i ich niepewności (narysuj prostokąty niepewności).
- b. Narysuj krzywą najlepszego dopasowania.
- c. Biorąc dwa (odległe od siebie) punkty z tej linii, oblicz wartość współczynnika kierunkowego. Jaki jest sens fizyczny tego współczynnika?
- d. Narysuj (na sporządzonym wcześniej wykresie) dwie proste o największym i najmniejszym kącie nachylenia. Oblicz ich wartości i następnie niepewność współczynnika kierunkowego prostej. Zapisz poprawnie wynik pomiaru.
- e. Odczytaj z wykresu współrzędną przecięcia narysowanej linii z osią prędkości. Jaki jest sens fizyczny tej wartości? Oblicz niepewność tej wartości. Zapisz poprawnie wynik końcowy.

f. Napisz równanie obrazujące zależność prędkości samochodu od czasu trwania jego ruchu.

g. Oblicz względną niepewność pomiaru przyspieszenia samochodu.

h. **(dla chętnych)** Oblicz wartość współczynnika korelacji pomiędzy napięciem elektrycznym a natężeniem prądu. Pokaż wykonane obliczenia wartości pośrednich (najprościej w tabelce wykonanej w Excelu).