

Granica funkcji. Pochodna funkcji jednej zmiennej

Przykładowe zadania na egzamin

1. Niech:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -2, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 5,$$

Oblicz wartość następujących granic:

$$\text{a. } \lim_{x \rightarrow x_0} (3 \cdot f(x) + 4 \cdot g(x)) \quad \text{b. } \lim_{x \rightarrow x_0} 3 \cdot f(x) \cdot g^2(x) \quad \text{c. } \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{2}{g(x)} + \frac{1}{f(x)} \right)$$

2. Korzystając z twierdzeń o arytmetyce granic, oblicz wartości następujących granic:

$$\text{a. } \lim_{x \rightarrow -1} (x^3 - 2 \cdot x^2 + 5) \quad \text{b. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+3}{x^2+x-3} \quad \text{c. } \lim_{x \rightarrow 5} \left(\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5} \right)$$

3. Korzystając z granic wyrażeń nieoznaczonych, oblicz granice:

$$\text{a. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3 \cdot x)}{\sin(5 \cdot x)} \quad \text{b. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+3}{x^2+x-3} \quad \text{c. } \lim_{x \rightarrow 5} \left(\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5} \right)$$

4. Oblicz granice następujących ciągów:

$$\text{a. } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+2} \right)^n \quad \text{b. } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n \quad \text{c. } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+2} \right)^n$$

5. Znajdź asymptoty pionowe następujących funkcji wymiernych:

$$\text{a. } f(x) = \frac{x}{x^2-3} \quad \text{b. } f(x) = \frac{x^2+3}{x-3} \quad \text{c. } f(x) = \frac{x^2-5}{x^3-4 \cdot x^2}$$

6. Wyznacz równania asymptot ukośnych następujących funkcji wymiernych:

$$\text{a. } f(x) = \frac{x^2+4}{x} \quad \text{b. } f(x) = \frac{x^2-x}{3 \cdot x}$$

7. Korzystając z definicji oblicz pochodne funkcji we wskazanych punktach:

$$\text{a. } f(x) = x^3, x_0 \in \mathbb{R} \quad \text{b. } f(x) = e^{-x}, x_0 \in \mathbb{R}$$

8. Napisz równanie stycznej i normalnej do wykresów podanych poniżej funkcji we wskazanych punktach:

$$\text{a. } f(x) = x^2 + 2, (2; 6) \quad \text{b. } f(x) = e^x, (0; 1)$$

9. Określ dziedzinę podanych poniżej funkcji i oblicz ich pierwszą pochodną:

$$\text{a. } f(x) = x^4 - 3 \cdot x^2 - \frac{1}{x} \quad \text{b. } f(x) = \frac{x^2+3}{x^2-4}$$

10. Określ dziedzinę podanych funkcji złożonych i oblicz ich pierwszą pochodną:

$$\text{a. } f(x) = (2 \cdot x^2 - 5)^2 \quad \text{b. } f(x) = \left(\frac{x^2-2}{x-1} \right)^2 \quad \text{c. } f(x) = \sin(\cos x)$$

11. Korzystając z definicji różniczki funkcji, oblicz przybliżone wartości wyrażeń:

$$\text{a. } \ln 1,004 \quad \text{b. } e^{-0,01} \quad \text{c. } \frac{1}{1+3 \cdot \sin 0,03}$$

12. Oblicz pochodne - stopnia pierwszego, drugiego i trzeciego - następujących funkcji:

a. $f(x) = e^{2 \cdot x}$ b. $f(x) = \sin^2 x$ c. $f(x) = x \cdot \ln x$

13. Znajdź wzór ogólny na pochodną n -tego rzędu funkcji:

a. $f(x) = \frac{1}{x}$ b. $f(x) = \sin x$ c. $f(x) = e^{-2 \cdot x}$

14. Określ dziedzinę i znajdź przedziały monotoniczności funkcji:

a. $f(x) = \frac{x}{x^2 + 3}$ b. $f(x) = 2 \cdot x^3 + 4 \cdot x$ c. $f(x) = \frac{x^2}{4 - x^2}$

15. Korzystając z reguły de L'Hospitala oblicz wartość następujących granic:

a. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}$ b. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 3 \cdot x}{2 \cdot x^3 - 2}$ c. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - 3}{x^3}$

16. Oblicz wartość następujących granic:

a. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x$ b. $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \cdot e^{-x}$ c. $\lim_{x \rightarrow 1^+} x^{\ln x}$

17. Określ dziedzinę funkcji i znajdź wszystkie ekstrema lokalne podanych poniżej funkcji. Określ rodzaj ekstremum:

a. $f(x) = e^x + e^{-x}$ b. $f(x) = x^3 - 3 \cdot x^2 + 4$ c. $f(x) = x \cdot \sqrt{x - 2}$

18. Określ dziedzinę funkcji i przedziały jej wypukłości:

a. $f(x) = x^4$ b. $f(x) = x^3 - 5 \cdot x^2 + 2$ c. $f(x) = \frac{x}{x^2 - 9}$

19. Określ dziedzinę funkcji i znajdź (o ile istnieją) punkty przegięcia tej funkcji:

a. $f(x) = x^4 - 12 \cdot x^3 - 6$ b. $f(x) = 6 \cdot x^2 - \frac{1}{x}$ c. $f(x) = x^2 \cdot \ln x$

20. Zbadaj przebieg zmienności następujących funkcji i naszkicuj ich wykresy:

a. $f(x) = x^3 - 4 \cdot x^3 + 3$ b. $f(x) = \frac{x^2}{x - 1}$

21. Wyznacz wymiary walca (jego promień i wysokość), który o danej powierzchni całkowitej P_c ma największą objętość?

22. Daną liczbę dodatnią k rozłóż na takie dwa składniki, aby suma sześcianów tych składników była najmniejsza.

23. Wyznacz długości boków prostokąta o stałym obwodzie l tak, aby przekątna tego prostokąta była najkrótsza.