Prawa Keplera

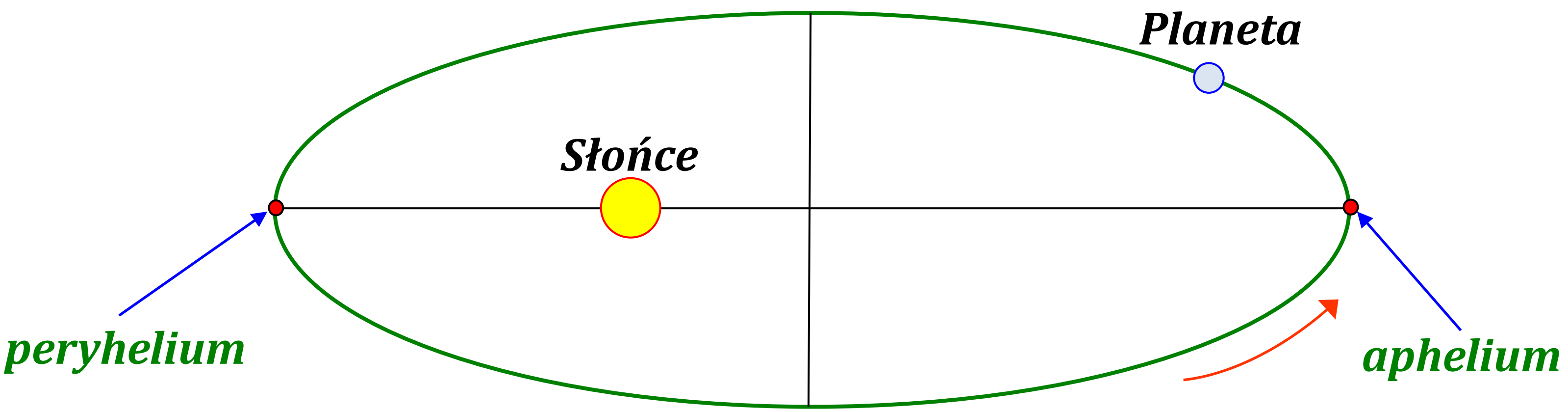
dr inż. Romuald Kędzierski

Johannes Kepler
(1571 - 1630)

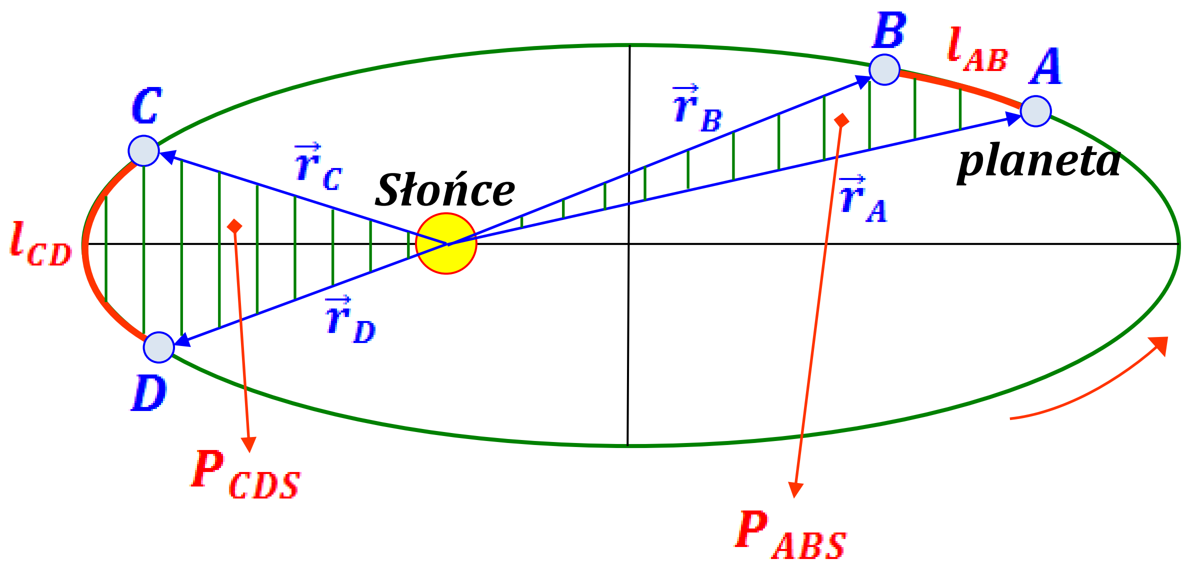
Na podstawie zebranych danych obserwacyjnych (m.in. swojego nauczyciela Tycho Brache) sformułował trzy prawa dotyczące ruchu planet w Układzie Słonecznym.

Pierwsze prawo Keplera

Planety poruszają się wokół Słońca po torach zamkniętych będących elipsami, natomiast Słońce znajduje się w jednym z tzw. ognisk tej elipsy, wspólnym dla wszystkich planet.



Drugie prawo Keplera



$\vec{r}$ - tzw. promień wodzący planety; jest to wektor łączący Słońce z planetą

W tych samych przedziałach czasu, promień wodzący danej planety krążącej wokół Słońca zakreśla takie same pola.

Jeśli $\Delta t_{CD} = \Delta t_{AB}$ to $P_{CDS} = P_{ABS}$

Z rysunku widać, że: $l_{CD} > l_{AB} \longrightarrow v_{śr,CD} > v_{śr,AB}$

Wniosek:

Jeżeli odległość planety względem Słońca maleje, to wartość jej prędkości rośnie, natomiast gdy jej odległość od Słońca rośnie, to wartość jej prędkości maleje.

(Planety względem Słońca poruszają się ruchem niejednostajnie zmiennym!)

Uwaga:

Drugie prawo Keplera wynika z zasady zachowania momentu pędu dla układu Słońce – planeta.

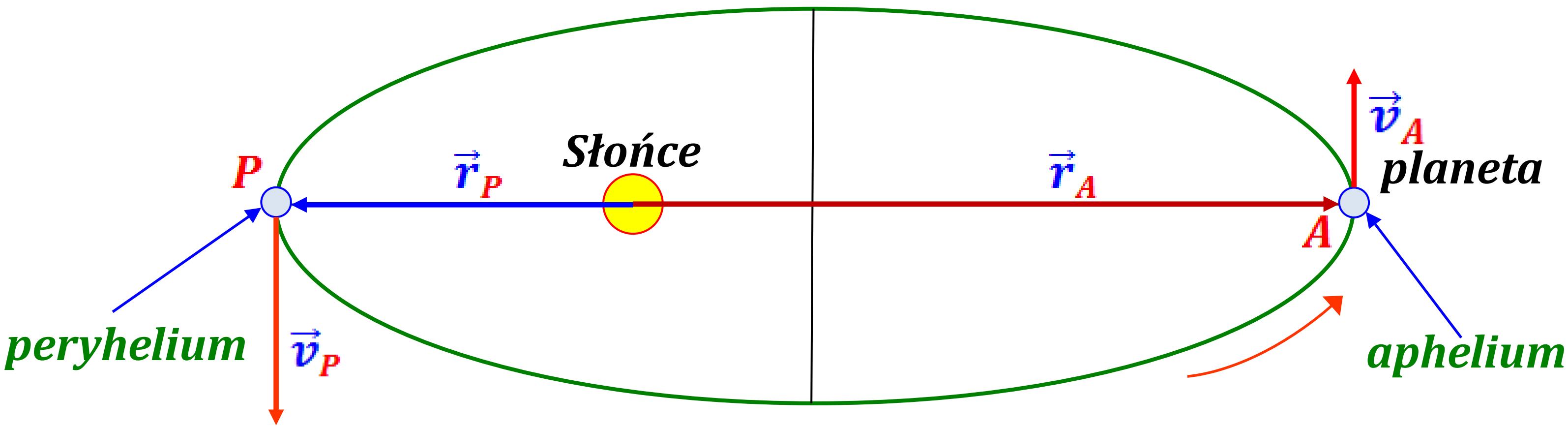
Jeżeli m oznaczać będzie masę planety, r jej odległość od Słońca, natomiast v wartość jej prędkości względem Słońca, to:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (m \cdot \vec{v}) = const$$

gdzie:

$$L = m \cdot v \cdot r \cdot sin\sphericalangle(\vec{r};\vec{p}) = m \cdot v \cdot r \cdot sin\alpha$$

Jeżeli planeta znajduje się w swoim peryhelium (P) lub aphelium (A), to:



$$\vec{r}_A > \vec{r}_P$$

$$\sphericalangle(\vec{r}_P;\vec{v}_P) = \sphericalangle(\vec{r}_A;\vec{v}_A) = 90^\circ \qquad sin90^\circ = 1$$

Stąd:

$$m \cdot v_P \cdot r_P = m \cdot v_A \cdot r_A \Longrightarrow \frac{v_A}{v_P} = \frac{r_P}{r_A} < 1 \Longrightarrow v_A < v_P$$

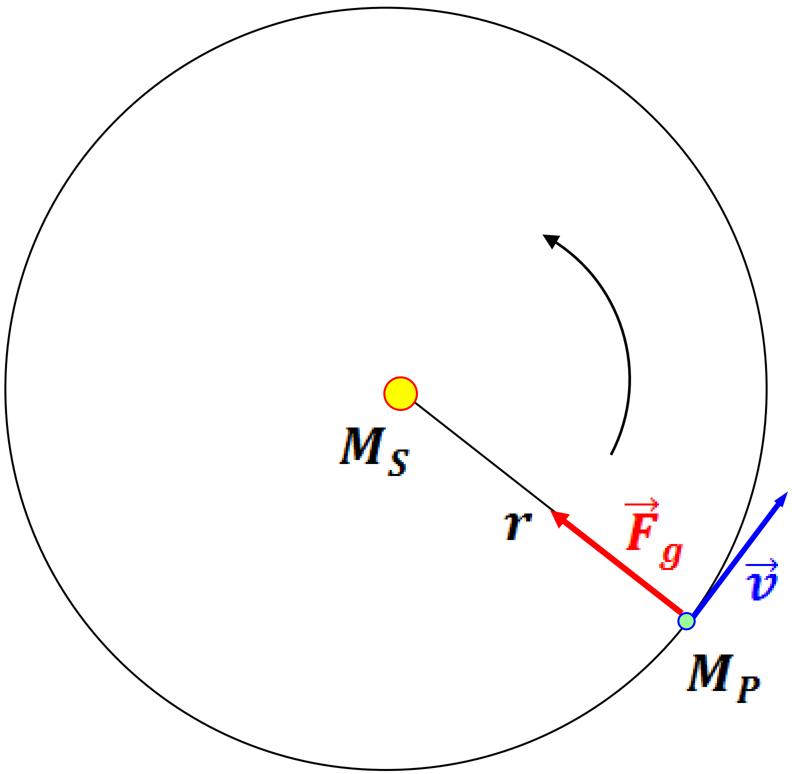
Ponadto:

$$v_P = max \qquad v_A = min$$

Trzecie prawo Keplera

Założenie:

Planeta o masie M_P krąży wokół Słońca o masie M_S, po okręgu o promieniu r ze stałą co do wartości prędkością v.



Wnioski:

Siła grawitacji ma kierunek prostopadły do wektora prędkości

⇓

Nie może zmienić wartości prędkości planety względem Słońca, a tylko zakrzywia jej tor

⇓

Pełni rolę siły dośrodkowej

⇓

$$F_d = F_g$$

Problem:

Czy czas obiegu planety wokół Słońca (okres obiegu) zależy od jej odległości od Słońca?

W rozpatrywanej sytuacji siła grawitacji pełni rolę siły dośrodkowej, dlatego:

$$F_d = F_g$$

Gdzie:

$$F_d = \frac{M_P \cdot v^2}{r} \qquad F_g = \frac{G \cdot M_S \cdot M_P}{r^2}$$

Stąd:

$$\frac{M_P \cdot v^2}{r} = \frac{G \cdot M_S \cdot M_P}{r^2} \quad // \cdot \frac{r}{M_P}$$

$$v^2 = \frac{G \cdot M_S}{r}$$

Z opisu ruchu po okręgu:

$$v = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T}$$

Stąd:

$$v^2 = \left(\frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T}\right)^2 = \underbrace{\frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r^2}{T^2} = \frac{G \cdot M_S}{r}}\ \Big/\!\!\Big/ \cdot \frac{r}{4 \cdot \pi^2}$$

$$\boxed{\frac{r^3}{T^2} = \underbrace{\frac{G \cdot M_S}{4 \cdot \pi^2}}}$$

Dla każdej planety wynosi tyle samo!

Zatem:

$$\boxed{\frac{r^3}{T^2} = const}$$

Dla każdej planety Układu Słonecznego, stosunek sześcianu jej średniej odległości od Słońca i kwadratu okresu jej obiegu wokół Słońca ma taką samą wartość.

Trzecie prawo Keplera

Wnioski:

1. ***Jeżeli stosunek dwóch wielkości pozostaje stały, to są to wielkości do siebie wprost proporcjonalne.***

$$\frac{r^3}{T^2} = const \quad \Rightarrow \quad T^2 \sim r^3 \quad \Rightarrow \quad T \sim \sqrt{r^3}$$

Wynika stąd, że gdyby na przykład odległość planety od Słońca wzrosła cztery razy, to okres jej obiegu wzrósłby osiem razy.

2. ***Dla dwóch dowolnych planet A i B zachodzi proporcja:***

$$\frac{r_A^3}{T_A^2} = \frac{r_B^3}{T_B^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{T_B^2}{T_A^2} = \frac{r_B^3}{r_A^3} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{T_B}{T_A}\right)^2 = \left(\frac{r_B}{r_A}\right)^3$$

3. ***Analogiczna zależności są prawdziwe również, np. dla satelitów okrążających Ziemie. Wtedy:***

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{G \cdot M_Z}{4 \cdot \pi^2}$$ ***gdzie:*** $$r = R_Z + h$$

Wiadomo, że taki a taki pomysł jest nie do zrealizowania.

Ale żyje sobie gdzieś jakiś nieuk, który o tym nie wie.

I on właśnie dokonuje tego wynalazku!

Albert Einstein