Model Bohra budowy atomu wodoru - opis matematyczny

Uwzględniając postulaty kwantowe Bohra, można obliczyć promienie orbit dozwolonych, energie elektronu na tych orbitach, wartość prędkości elektronu na orbicie dozwolonej, jak i możliwe długości fal emitowanych przez atom wodoru podczas przeskoku elektronu z orbity wyższej na niższą.

UWAGA:

Wyprowadzenia wzorów stanowią materiał wykraczający poza podstawę programową.

1. Promień orbity dozwolonej.

Na orbicie dozwolonej - o numerze $\boldsymbol{n}$ - rolę siły dośrodkowej $\vec{F}_d$ pełni siła oddziaływania kulombowskiego $\vec{F}_C$. Jeżeli elektron krąży po okręgu, to obie siły mają takie same wartości:

$$F_d = F_C$$

Stąd:

$$\frac{m_e \cdot v_n^2}{r_n} = \frac{k \cdot q_p \cdot |q_e|}{r_n^2} \qquad [1]$$

q_p - ładunek elektryczny protonu, q_e- ładunek elektryczny elektronu

$$q_p = |q_e| = e \cong 1,6 \cdot 10^{-19}\ C\ (\textit{wartość ładunku elementarnego})$$

Z drugiego postulatu kwantowego Bohra wynika, że:

$$m_e \cdot v_n \cdot r_n = n \cdot \frac{h}{2 \cdot \pi}$$

$$v_n = \frac{n \cdot h}{2 \cdot \pi \cdot m_e \cdot r_n}$$

Po podstawieniu - ostatniej zależności do [1] - otrzymuje się:

$$\frac{m_e \cdot \left(\frac{n^2 \cdot h^2}{4 \cdot \pi^2 \cdot {m_e}^2 \cdot r_n^2}\right)}{r_n} = \frac{k \cdot e^2}{r_n^2}$$

Po redukcji wyrazów podobnych:

$$\frac{n^2 \cdot h^2}{4 \cdot \pi^2 \cdot m_e \cdot r_n} = k \cdot e^2$$

Zatem:

$$r_n = \frac{n^2 \cdot h^2}{4 \cdot \pi^2 \cdot k \cdot m_e \cdot e^2}$$

$$r_n = n^2 \cdot \frac{h^2}{4 \cdot \pi^2 \cdot k \cdot m_e \cdot e^2}$$

Wyrażenie:

$$\frac{h^2}{4 \cdot \pi^2 \cdot k \cdot m_e \cdot e^2}$$

ma stałą wartość, którą można oznaczyć symbolem r_o. Zatem promień orbity dozwolonej może być wyrażony zależnością:

$$\boxed{r_n = n^2 \cdot r_o}$$

gdzie:

$$r_o = \frac{h^2}{4 \cdot \pi^2 \cdot k \cdot m_e \cdot e^2} \cong 5,3 \cdot 10^{-11}\ m$$

Problem:

Czy odległości pomiędzy sąsiednimi orbitami - w modelu Bohra - mają takie same wartości?

Rozwiązanie problemu:

$$n = 1 \Rightarrow r_1 = 1^2 \cdot r_o = 1 \cdot r_o$$

$$\Delta r_{1-2} = r_2 - r_1 = 4 \cdot r_o - 1 \cdot r_o = 3 \cdot r_o$$

$$n = 2 \Rightarrow r_2 = 2^2 \cdot r_o = 4 \cdot r_o$$

$$\Delta r_{2-3} = r_3 - r_2 = 9 \cdot r_o - 4 \cdot r_o = 5 \cdot r_o$$

$$n = 3 \Rightarrow r_2 = 3^2 \cdot r_o = 9 \cdot r_o$$

$$\Delta r_{3-4} = r_4 - r_3 = 16 \cdot r_o - 9 \cdot r_o = 7 \cdot r_o$$

$$n = 4 \Rightarrow r_2 = 4^2 \cdot r_o = 16 \cdot r_o$$

itd. ...

Wniosek:

Jeżeli oddalamy się od jądra atomowego, to odległości pomiędzy sąsiednimi parami promieni orbit dozwolonych rosną, tj. każda kolejna odległość pomiędzy parą sąsiednich orbit jest większa o $2 \cdot r_o$ od poprzedniej!

2. Energia elektronu na orbicie dozwolonej.

Energia elektronu E_n na każdej z orbit dozwolonych jest sumą jego energii kinetycznej i potencjalnej:

$$E_n = E_{k,n} + E_{p,n}$$

gdzie:

$$E_{p,n} = \frac{k \cdot q_p \cdot q_e}{r_n} = \frac{k \cdot e \cdot (-e)}{r_n} = -\frac{k \cdot e^2}{r_n}$$

$$E_{k,n} = \frac{m_e \cdot v_n^2}{2}$$

Z równania [1] wynika, że:

$$m_e \cdot v_n^2 = \frac{k \cdot e^2}{r_n}$$

Stąd:

$$E_{k,n} = \frac{\frac{k \cdot e^2}{r_n}}{2} = \frac{k \cdot e^2}{2 \cdot r_n}$$

Zatem:

$$E_n = \frac{k \cdot e^2}{2 \cdot r_n} + \left(-\frac{k \cdot e^2}{r_n}\right)$$

$$E_n = \frac{k \cdot e^2}{2 \cdot r_n} + \left(-\frac{2 \cdot k \cdot e^2}{2 \cdot r_n}\right)$$

$$E_n = \frac{-k \cdot e^2}{2 \cdot r_n}$$

gdzie:

$$r_n = n^2 \cdot r_o$$

Stąd:

$$E_n = -\frac{k \cdot e^2}{2 \cdot n^2 \cdot r_o}$$

Zatem:

$$E_n = -\frac{1}{n^2} \cdot \frac{k \cdot e^2}{2 \cdot r_o}$$

Wyrażenie:

$$\frac{k \cdot e^2}{2 \cdot r_o} = A$$

ma stałą wartość, która po podstawieniu odpowiednich danych wynosi:

$$A = \frac{k \cdot e^2}{2 \cdot r_o} \cong 2,17 \cdot 10^{-18}\, J \cong 13,6\, eV$$

Zatem:

$$\boxed{E_n = -\frac{A}{n^2}}$$

Problem:

Jak się zmienia energia elektronu ze wzrostem numeru orbity dozwolonej?

$$n = 1 \quad \Rightarrow \quad E_1 = -\frac{A}{1^2} = -A$$

$$n = 2 \quad \Rightarrow \quad E_2 = -\frac{A}{2^2} = -\frac{A}{4}$$

$$n = 3 \quad \Rightarrow \quad E_3 = -\frac{A}{3^2} = -\frac{A}{9}$$

$$n = 4 \quad \Rightarrow \quad E_4 = -\frac{A}{4^2} = -\frac{A}{16}$$

.

.

.

$$n \to \infty \quad \Rightarrow \quad E_\infty \to 0$$

Wnioski i uwagi:

a. Ze wzrostem numeru orbity energia elektronu wzrasta.

$$E_1 = -13,6\, eV = min < E_2 < E_3 < E_4 < \cdots < E_\infty \to 0 = max$$

b. Jeżeli elektron znajduje się na orbicie dozwolonej o numerze 1, to mówimy, że atom wodoru znajduje się w stanie podstawowym.

c. Jeżeli elektron znajduje się na orbicie dozwolonej o numerze większym od 1 ale mniejszym od "nieskończoności, to mówimy, że atom wodoru znajduje się w stanie wzbudzonym.

d. Stan odpowiadający sytuacji $n \to \infty$ nazywamy stanem zjonizowanym.

e. Ze wzrostem numeru orbity, różnice energii pomiędzy sąsiednimi parami orbit dozwolonych są coraz mniejsze.

$$E_{2,1}=E_2-E_1=\frac{3}{4}\cdot A \qquad E_{3,2}=E_3-E_2=\frac{5}{36}\cdot A \qquad E_{4,3}=E_4-E_3=\frac{7}{144}\cdot A \quad \dots$$

3. Możliwe długości fal elektromagnetycznych emitowanych podczas przeskoku elektronu z orbity wyższej na niższą.

Jeżeli energie elektronu na orbitach dozwolonych $\boldsymbol{m}$ i $\boldsymbol{n}$ $(m>n)$ oznaczymy jako $\boldsymbol{E_m}, \boldsymbol{E_n}$, to zgodnie z trzecim postulatem kwantowym Bohra, energię fotonu wyemitowanego podczas przeskoku elektronu z orbity wyższej na niższą, można wyrazić zależnością:

$$E_{fotonu}=E_m-E_n$$

Ponieważ:

$$E_{fotonu}=\frac{h\cdot c}{\lambda}$$

to uwzględniając zależność na energię elektronu na orbicie dozwolonej, dostaje się:

$$\frac{h\cdot c}{\lambda}=-\frac{A}{m^2}-\left(-\frac{A}{n^2}\right)=A\cdot\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{m^2}\right)$$

Po obustronnym podzieleniu przez $\boldsymbol{h\cdot c}$, mamy:

$$\frac{1}{\lambda}=\frac{A}{h\cdot c}\cdot\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{m^2}\right)$$

Wyrażenie:

$$\frac{A}{h\cdot c}$$

ma stałą wartość, która po podstawieniu odpowiednich danych wynosi:

$$\cong 1{,}1\cdot 10^7\,\frac{1}{m}=R_H$$

Jest to wartość tzw. stałej Rydberga. Zatem:

$$\boxed{\frac{1}{\lambda}=R_H\cdot\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{m^2}\right)}$$

Z powyższego wzoru można wyliczyć wszystkie możliwe długości fal emitowanych przez atom wodoru podczas przeskoku elektronu z orbity wyższej na niższą, gdzie $\boldsymbol{n}$ oznacza wtedy numer orbity docelowej (na którą elektron przeskoczył), natomiast $\boldsymbol{m}$ numer orbity wyjściowej (z której elektron przeskoczył).

W zależności od numeru orbity docelowej, w widmie promieniowania atomu wodoru wyróżnia się tzw. serie widmowe:

$\mathbf{n}=\mathbf{1}$ seria Lymana (leży w dalekim nadfiolecie)
$\mathbf{n}=\mathbf{2}$ seria Balmera (w dużej części leży w obszarze promieniowania widzialnego)
$\mathbf{n}=\mathbf{3}$ seria Paschena (leży w podczerwieni)
$\mathbf{n}=\mathbf{4}$ seria Bracketta (leży w podczerwieni)
$\mathbf{n}=\mathbf{5}$ seria Pfunda (leży w podczerwieni)
$\mathbf{n}=\mathbf{6}$ seria Humphreysa (leży w podczerwieni)

Dla każdej serii $\boldsymbol{n}$ ma wartość stałą, $\boldsymbol{m}$ natomiast przyjmuje wartości od $\boldsymbol{n+1}$ do ∞. Każdej serii odpowiada zbiór linii widmowych ułożonych w ten sposób, że seria zaczyna się zawsze od strony fal dłuższych i biegnie w stronę fal krótszych, przy czym odstępy pomiędzy sąsiednimi liniami widmowymi ciągle maleją (coraz mniejsze różnice długości fal między nimi) i jednocześnie linie mają coraz mniejsze natężenie; w końcu linie zagęszczają się tak bardzo, że spektrografy nie pozwalają już na ich oddzielne obserwowanie.

Zgodnie ze wzorem:

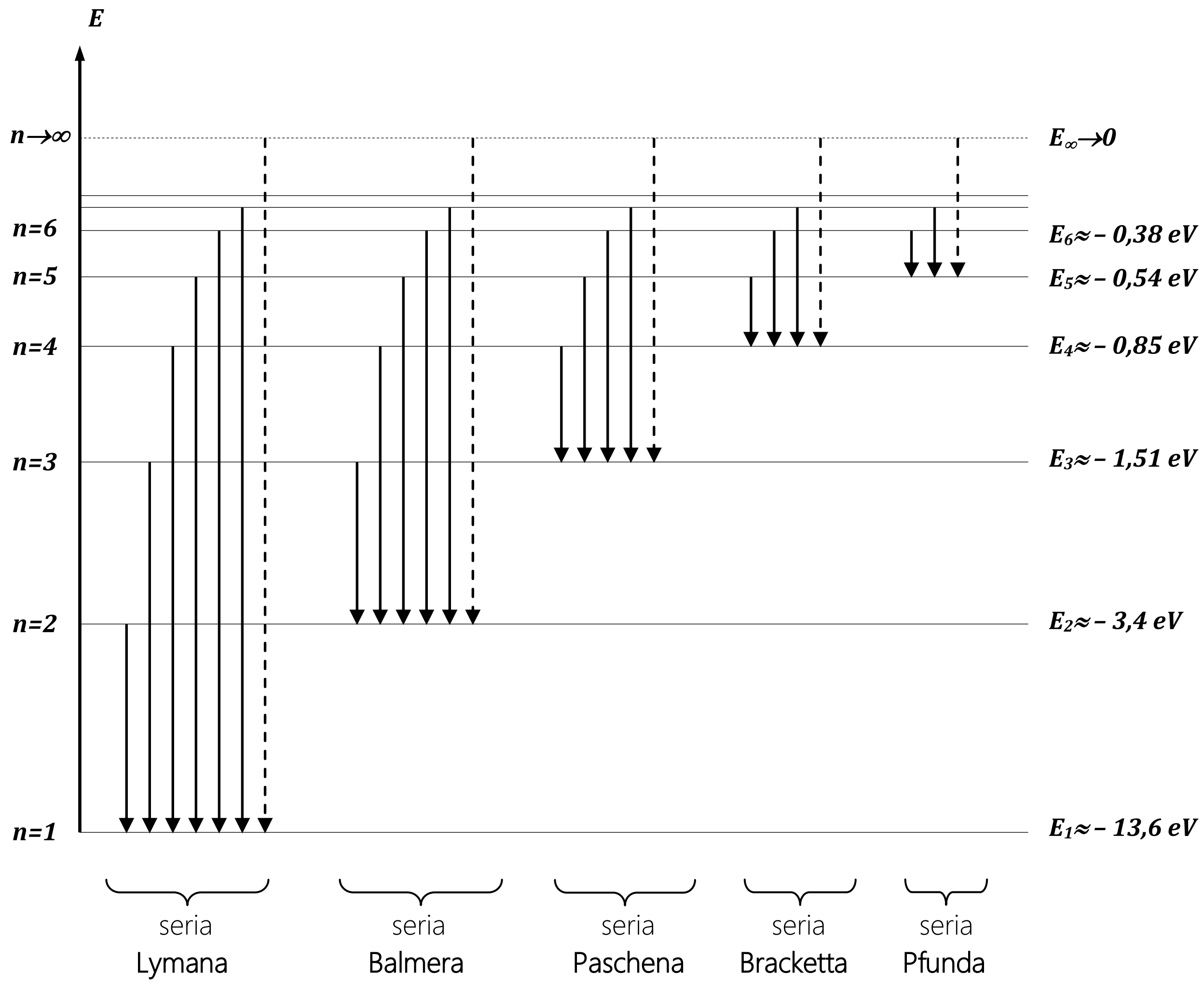
$$\boldsymbol{E_{fotonu} = \frac{h \cdot c}{\lambda}}$$

granicy długofalowej serii widmowej odpowiada minimalna energia wyemitowanego fotonu, dlatego oznacza to przeskok elektronu z najbliższej (wyższej) orbity na orbitę docelową dla danej serii widmowej.

$$\boldsymbol{\lambda = \lambda_{max}} \quad dla \quad \boldsymbol{m = n + 1} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\frac{1}{\lambda_{max}} = R_H \cdot \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right)}$$

Granicy krótkofalowej serii widmowej odpowiada maksymalna energia wyemitowanego fotonu, dlatego oznacza to przeskok elektronu z orbity „nieskończenie" odległej na orbitę docelową dla danej serii widmowej.

$$\boldsymbol{\lambda = \lambda_{min}} \quad dla \quad \boldsymbol{m \to \infty} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\frac{1}{\lambda_{min}} = R_H \cdot \frac{1}{n^2}} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\lambda_{min} = \frac{n^2}{R_H}}$$



Uwaga (materiał nadobowiązkowy):

Model Bohra promieniowania atomu wodoru można uogólnić na inne atomy, tak zwane wodoropodobne, tzn. takie, które na orbicie okołojądrowej mają tylko jeden elektron. Należą do nich: zjonizowany hel (He^{+}), lit (Li^{2+}), beryl (Be^{+3}) i inne. Wtedy możliwe długości fal emitowanych przez takie atomy można obliczyć ze wzoru:

$$\frac{1}{\lambda} = Z^2 \cdot R_H \cdot \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right)$$

Gdzie Z oznacza liczbę atomową pierwiastka (liczbę protonów w jądrze, tzn. także jego ładunek elektryczny wyrażony jako liczba ładunków elementarnych).

Na początku lat dwudziestych teoria Bohra zaczęła napotykać na coraz większe trudności. Zawodziła ona przy próbach analizy teoretycznej widm metali alkalicznych (Na, K itd.) dając wyniki wyraźnie różne od doświadczalnych, zawodziła jeszcze bardziej w przypadku helu niezjonizowanego, którego atom ma dwa elektrony. Trudności te wynikały z tego, że teoria Bohra nie uwzględnia takich (nieznanych wtedy) własności mikroświata jak falowa natura materii i zasada nieokreśloności Heisenberga. Poprawne rozwiązanie tych problemów dała dopiero mechanika kwantowa i elektrodynamika kwantowa.

Zadanie domowe dla chętnych:

Korzystając z postulatów kwantowych Bohra oraz powyższych zależności, wyprowadź ogólny wzór na wartość prędkości elektronu na dowolnej $\boldsymbol{n-\mathbf{tej}}$ orbicie dozwolonej.