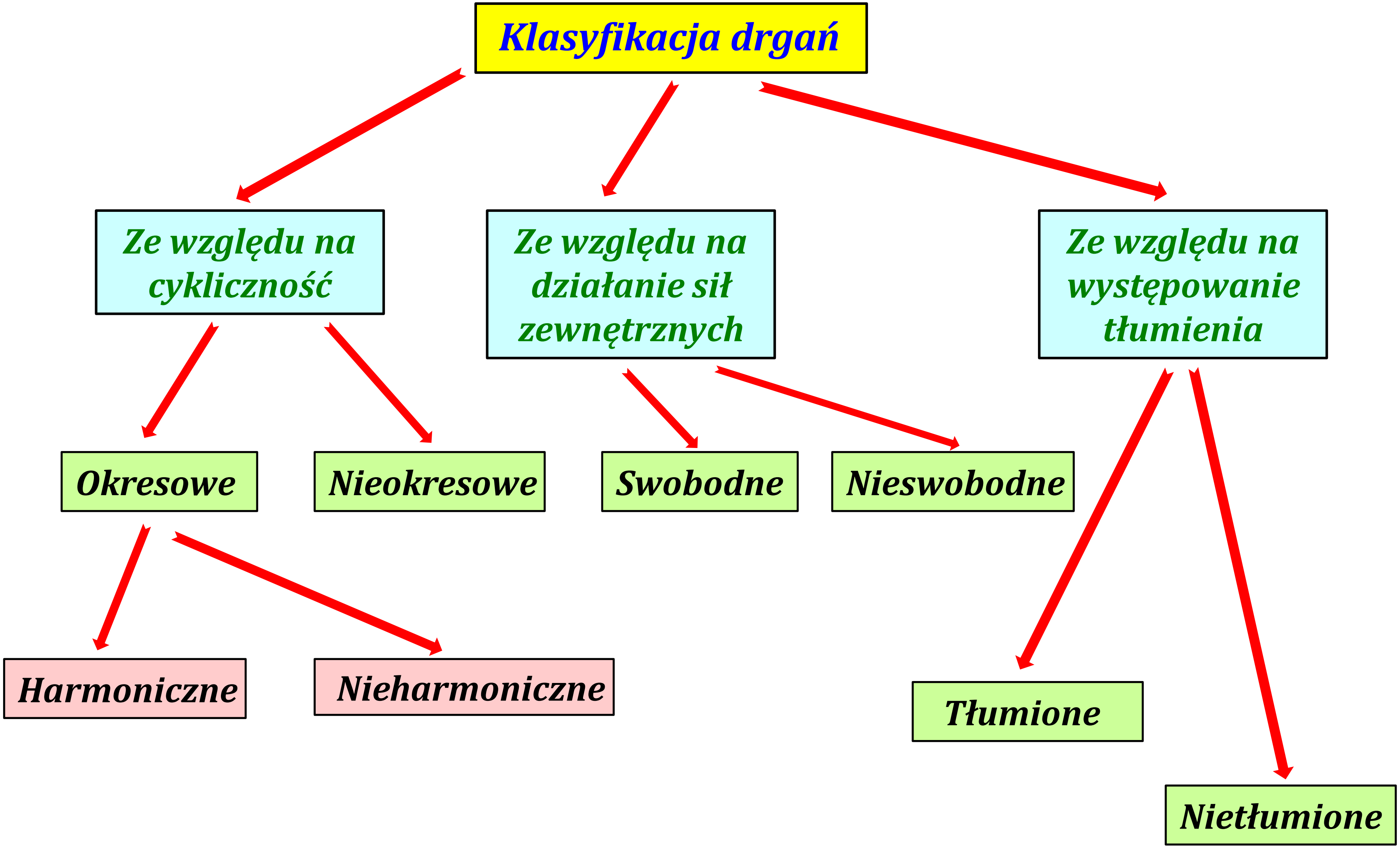
Drgania harmoniczne a ruch po okręgu

dr inż. Romuald Kędzierski

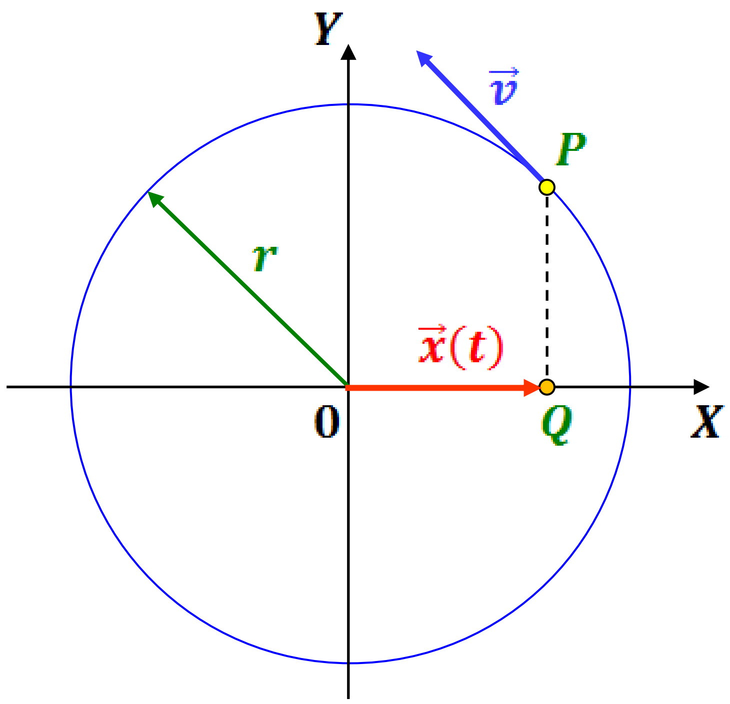


Klasyfikacja drgań
Ze względu na cykliczność
Ze względu na działanie sił zewnętrznych
Ze względu na występowanie tłumienia
Okresowe
Nieokresowe
Swobodne
Nieswobodne
Harmoniczne
Nieharmoniczne
Tłumione
Nietłumione

Zależność wychylenia z położenia równowagi od czasu w ruchu harmonicznym

Założenia wyjściowe:

- *punkt materialny P porusza się po okręgu o promieniu r z prędkością o stałej wartości v*
- *początek układu współrzędnych znajduje się w środku okręgu*



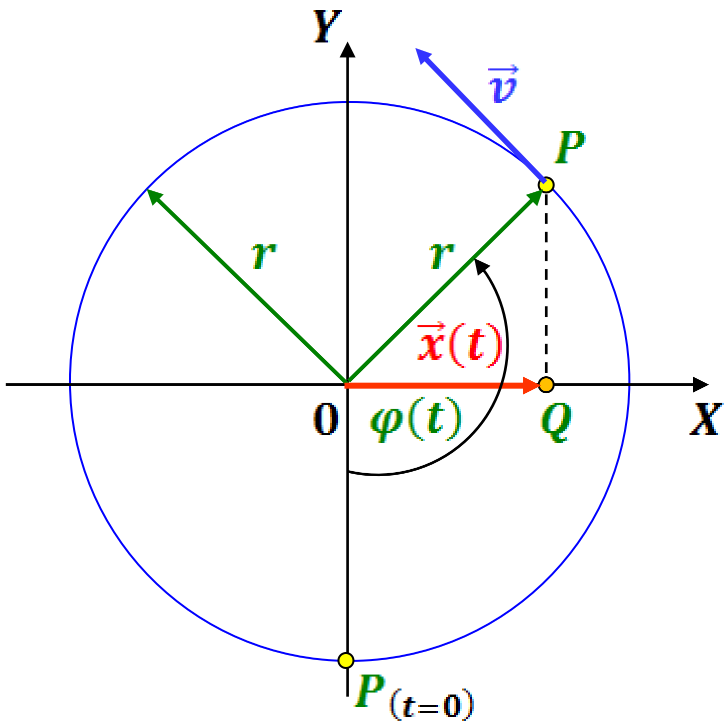
Problem:

Jakim ruchem porusza się punkt Q, będący rzutem punktu P na oś X?

$$\vec{x}(t) = ?$$

Założenie dodatkowe:

❖ *W chwili początkowej punkt materialny P znajdował się w najniższym położeniu.*



$$t = 0 \;\Rightarrow\; \vec{x}(t) = \vec{x}_o = \vec{0}$$

W ruchu po okręgu:

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t - t_o} = \frac{\varphi(t)}{t}$$

Stąd:

$$\varphi(t) = \omega \cdot t = \frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t$$

Z trójkąta PQ0 widać, że:

$$\frac{x(t)}{r} = \cos(\varphi - 90°) \;\Rightarrow\; x(t) = r \cdot \cos(\varphi - 90°)$$

Ale:

$$\cos(\varphi - 90°) = \underbrace{\cos\big(-(90° - \varphi)\big)}_{\cos(-\alpha) = \cos\alpha} = \cos(90° - \varphi)$$

Oraz:

$$\cos(90° - \varphi) = \sin\varphi$$

Stąd:

$$\boxed{x(t) = r \cdot \sin\varphi(t) = r \cdot \sin(\omega \cdot t)}$$

Wnioski:

- *punkt Q wykonuje ruch okresowy wzdłuż osi X,*
- *ruch ten można traktować jako drgania zachodzące wzdłuż osi X, z położeniem równowagi znajdującym się w punkcie 0,*
- *maksymalne wychylenie punktu Q z punktu 0 jest równe promieniowi okręgu, dlatego amplituda tych drgań wynosi:* $A = r$
- *w ruchu drgającym odpowiednikiem prędkości kątowej w ruchu obrotowym jest tzw. częstość kołowa (kątowa) drgań,*
- *zależność położenia punktu Q względem punktu 0 (jego wychylenia z położenia równowagi) wraz z upływem czasu opisuje funkcja sinus.*

$$x(t) = A \cdot sin\varphi(t) = A \cdot sin(\omega \cdot t)$$

$$x(t) = A \cdot sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t\right)$$

Ruch drgający, w którym wychylenie z położenia równowagi zmienia się wraz z upływem czasu jak funkcja sinus, nazywa się ruchem harmonicznym.

Uwaga:

- *w ogólności, w chwili początkowej wychylenie z położenia równowagi nie musi być równe zero. Wtedy równanie zależności wychylenia od czasu przyjmuje postać:*

$$x(t) = A \cdot sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t + \varphi_o\right)$$

$\varphi_o -$ tzw. *faza początkowa (jej wartość należy wyrazić w radianach)*

$$(\varphi_o = 0 \quad i \quad t = 0) \quad \Rightarrow \quad x(0) = 0$$

$$(\varphi_o = 90^\circ \quad i \quad t = 0) \quad \Rightarrow \quad x(0) = A$$

$$(\varphi_o \neq k \cdot \pi, \;\; k \in C \quad i \quad t = 0) \quad \Rightarrow \quad x(0) \neq \; 0 \;\; i \;\; |x| < A$$

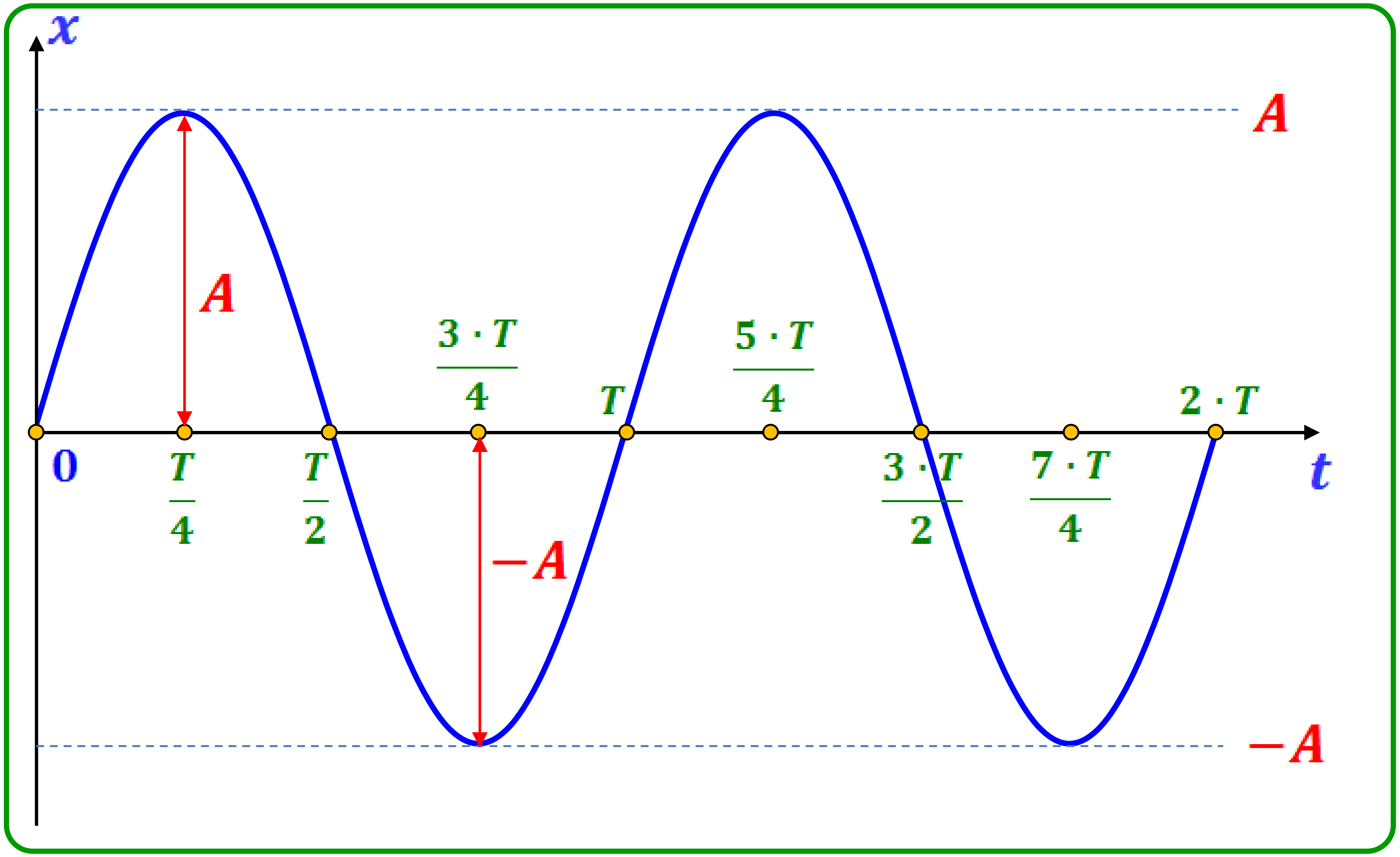
- *Wyrażenie:* $\Phi(\mathrm{t}) = \frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t + \varphi_o$ *nazywa się fazą drgań*

Zatem, zależność wychylenia od czasu dla drgań harmonicznych, można również przedstawić następująco :

$$x(t) = A \cdot sin\Phi(\mathrm{t})$$

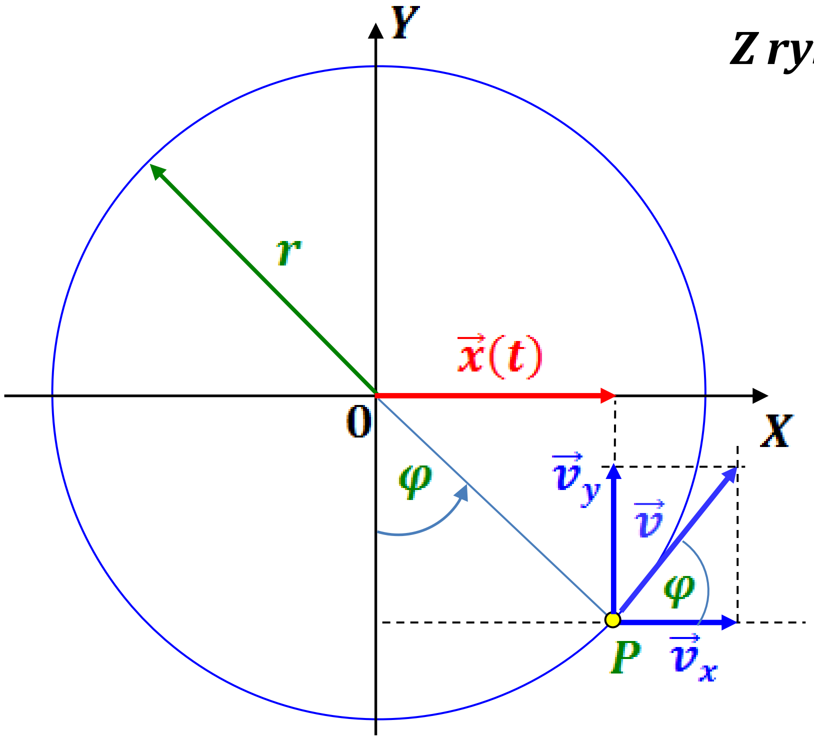
Graficzna interpretacja zależności wychylenia z położenia równowagi od czasu

$$x(t) = A \cdot sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t\right) \qquad \varphi_o = 0$$



Zależność wartości współrzędnej wektora prędkości od czasu w ruchu harmonicznym

Założenia wyjściowe: *jak w przypadku badania zależności wychylenia od czasu.*



Z rysunku wynika, że:

$$\frac{|\vec{v}_x|}{|\vec{v}|} = \frac{v_x}{v} = \cos\varphi \quad \Rightarrow \quad v_x = v \cdot \cos\varphi$$

$$\frac{|\vec{v}_y|}{|\vec{v}|} = \frac{v_y}{v} = \sin\varphi \quad \Rightarrow \quad v_y = v \cdot \sin\varphi$$

Ponieważ: $v = \omega \cdot r$ *i* $r = A$

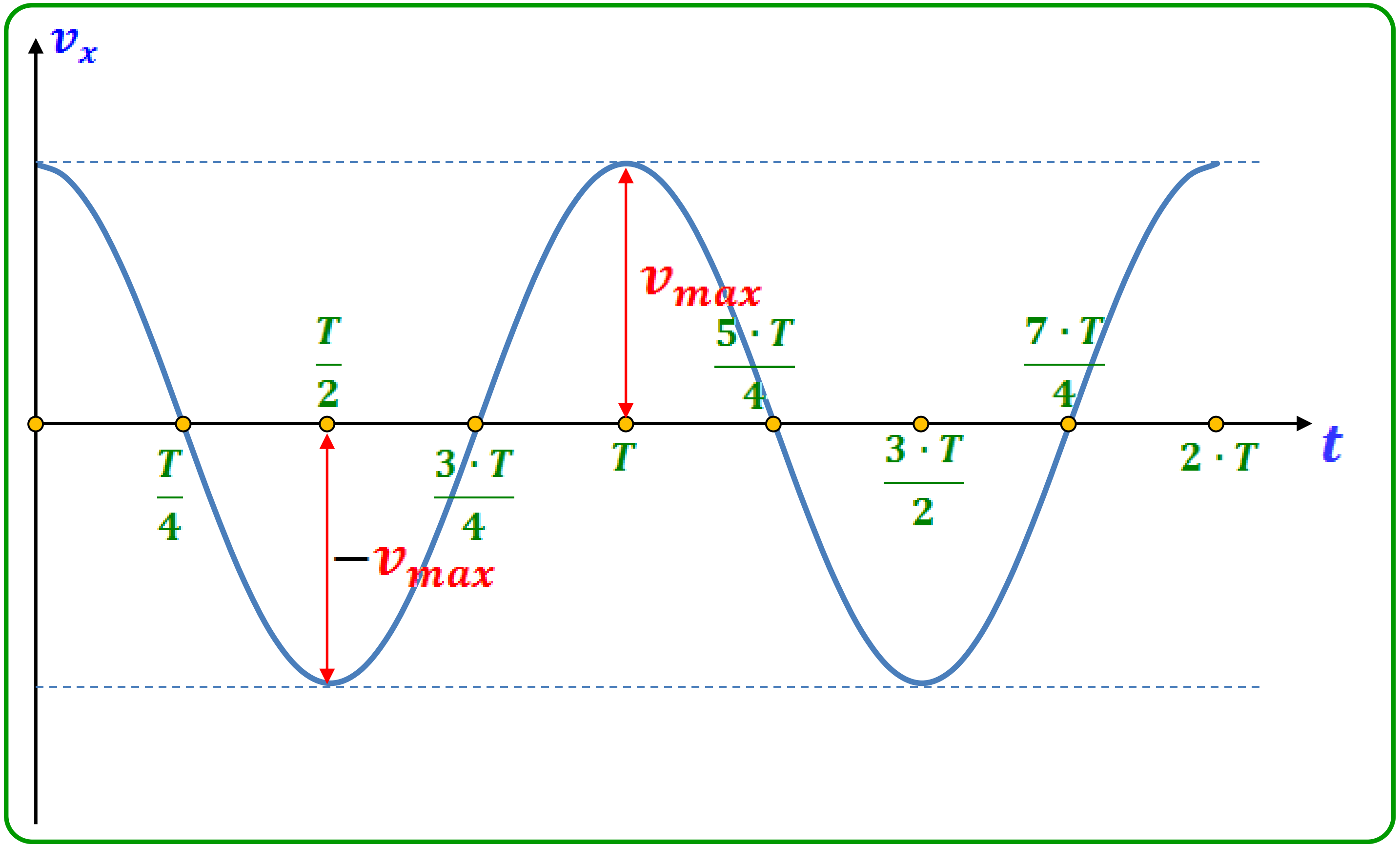
to: $v_x = \omega \cdot r \cdot \cos\varphi = \omega \cdot A \cdot \cos\varphi$

$$v_x = \underbrace{\omega \cdot A}_{v_{max}} \cdot \cos\varphi$$

$$v_x = \omega \cdot A \cdot \cos\varphi = \omega \cdot A \cdot \cos(\omega \cdot t) = v_{max} \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

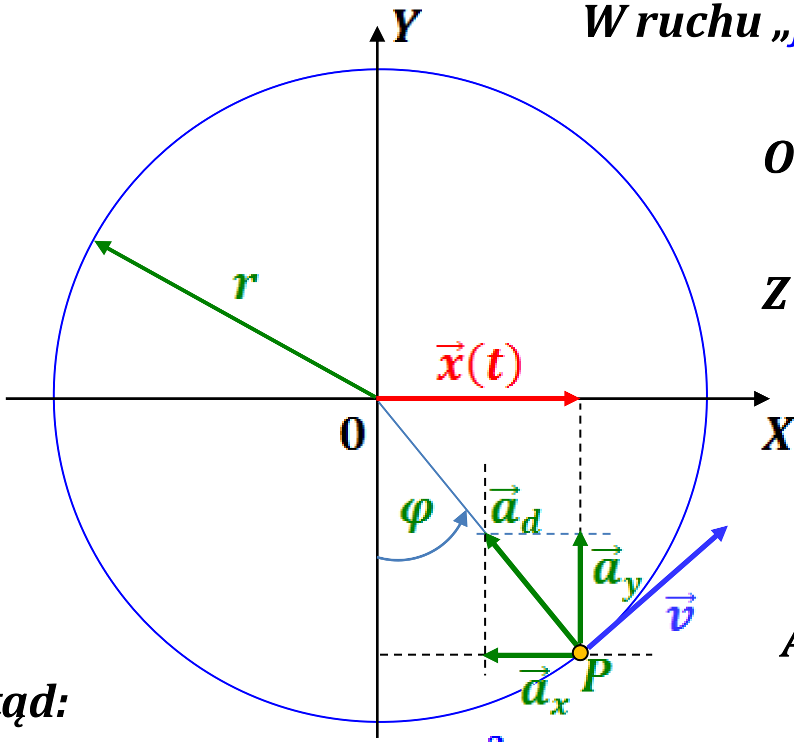
Graficzna interpretacja zależności współrzędnej prędkości od czasu w ruchu harmonicznym

$$v_x = v_{max} \cdot cos(\omega \cdot t) \quad \varphi_o = 0$$



Zależność wartości współrzędnej wektora przyspieszenia od czasu w ruchu harmonicznym

Założenia wyjściowe: *jak w przypadku badania zależności wychylenia od czasu.*



W ruchu „jednostajnym” po okręgu:

$$\Delta|\vec{v}| = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_s = \vec{0}$$

Oraz:

$$\vec{a} = \vec{a}_d \qquad |\vec{a}_d| = a_d = \frac{v^2}{r}$$

Z rysunku wynika, że:

$$\frac{|\vec{a}_x|}{|\vec{a}_d|} = \frac{a_x}{a_d} = cos(90^\circ - \varphi)$$

$$a_x \overset{!!!}{=} - a_d \cdot cos(90^\circ - \varphi)$$

przeciwny zwrot do osi X!

Ale:

$$cos(90^\circ - \varphi) = sin\varphi$$

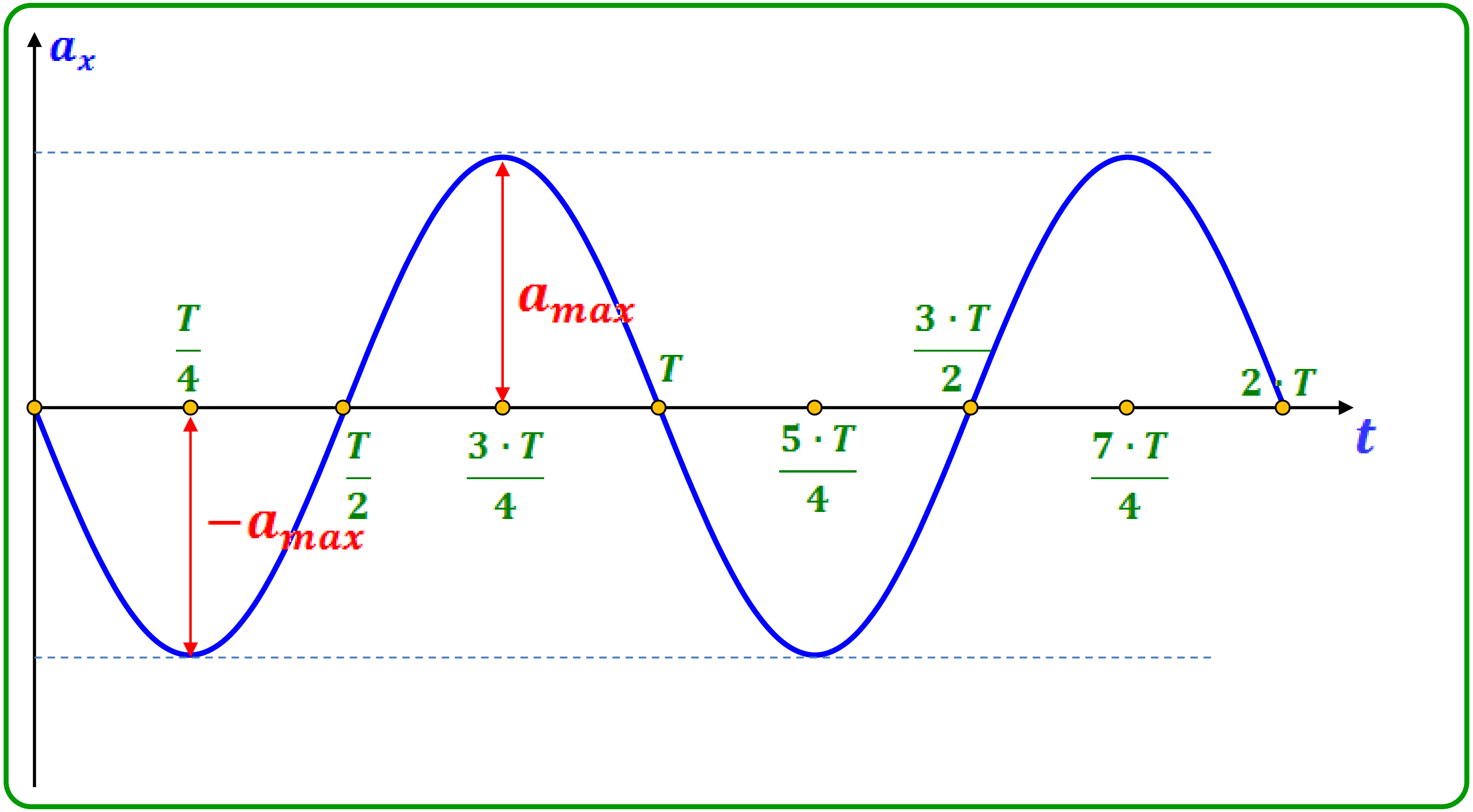
Stąd:

$$a_x = -a_d \cdot sin\varphi = -\frac{v^2}{r} \cdot sin(\omega \cdot t) = -\frac{\omega^2 \cdot r^2}{r} \cdot sin(\omega \cdot t) = -\omega^2 \cdot r \cdot sin(\omega \cdot t)$$

$$a_x = \underbrace{-\omega^2 \cdot A}_{a_{max}} \cdot sin(\omega \cdot t) \longrightarrow \boxed{a_x = -\omega^2 \cdot A \cdot sin(\omega \cdot t)}$$

Graficzna interpretacja zależności współrzędnej przyspieszenia od czasu w ruchu harmonicznym

$$a_x = -a_{max} \cdot sin(\omega \cdot t) \qquad \varphi_o = 0$$



Zależność wartości współrzędnej wektora siły wypadkowej od czasu w ruchu harmonicznym

Z drugiej zasady dynamiki Newtona wynika, że:

$$F_{w,x} = m \cdot a_x$$

Ponadto:

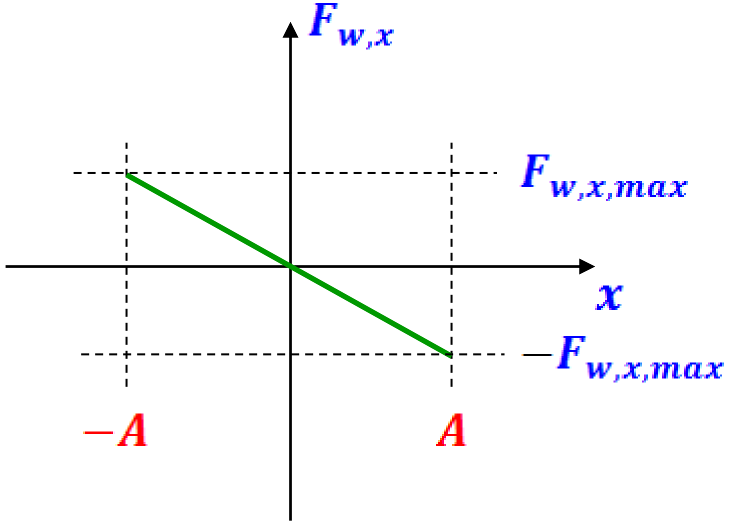
$$a_x = -\omega^2 \cdot A \cdot sin(\omega \cdot t)$$

Stąd:

$$F_{w,x} = -m \cdot \omega^2 \cdot \underbrace{A \cdot sin(\omega \cdot t)}_{x(t)} \longrightarrow \boxed{F_{w,x} = -m \cdot \omega^2 \cdot x(t)}$$

Wniosek:

Przyczyną ruchu harmonicznego jest siła, która jest wprost proporcjonalna do wychylenia z położenia równowagi, ale oba wektory mają przeciwne zwroty.



Podsumowanie

***Ruch drgający** nazywamy **harmonicznym**, jeżeli:*

- ***wychylenie z położenia równowagi zmienia się wraz z upływem czasu jak funkcja sinus,***
- ***siła powodująca ruch jest wprost proporcjonalna do wychylenia z położenia równowagi,***
- ***siłą, która również spełnia powyższy warunek jest siła sprężystości.***

Równania opisujące ruch harmoniczny

dla dowolnego φ_o

$$x(t) = A \cdot sin(\omega \cdot t + \varphi_o)$$

$$v_x = \omega \cdot A \cdot cos(\omega \cdot t + \varphi_o)$$

$$a_x = -\omega^2 \cdot A \cdot sin(\omega \cdot t + \varphi_o) = -\omega^2 \cdot x(t)$$

$$F_{w,x} = -m \cdot \omega^2 \cdot A \cdot sin(\omega \cdot t + \varphi_o) = -m \cdot \omega^2 \cdot x(t)$$

Zadanie domowe

Punkt materialny (o masie 50 gramów) wykonuje drgania harmoniczne opisane równaniem:

$$x(t) = 5 \cdot sin(2 \cdot \pi \cdot t + 30^\circ) \quad cm$$

Na jego podstawie:

- ***określ amplitudę drgań, ich okres i częstotliwość, wartość wychylenia w chwili początkowej,***
- ***napisz równania:*** $v_x(t), a_x(t), F_{w,x}(t)$,
- ***oblicz wartości maksymalne (tzw. amplitudy!) prędkości, przyspieszenia i siły wypadkowej,***
- ***oblicz wartości współrzędnych wektorów wychylenia z położenia równowagi, prędkości, przyspieszenia i siły wypadkowej, po upływie 0,75 sekundy od chwili początkowej,***
- ***oblicz, po upływie jakiego czasu licząc od chwili początkowej, wychylenie z położenia równowagi będzie po raz pierwszy równe połowie amplitudy drgań,***
- ***na jednym układzie współrzędnych narysuj przebiegi zależności:***

$$x(t), v_x(t), a_x(t), F_{w,x}(t).$$